1º) Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$**. ¿Existe** M^{-1}**?**

Nota: C^T denota la matriz traspuesta de C

Resolución

a) Calculamos $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$$|A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C| \cdot \frac{1}{|A|} = |C|^2 = (-2)^2 = 4$$

b) Las dimensiones de las matrices A y B son, respectivamente, $3x3$ y $3x2$. Se puede efectuar el producto $A \cdot B$ siendo la matriz producto M de dimensión $3x2$ y, por tanto, no cuadrada. En consecuencia M no tiene inversa M^{-1}.

2º) Sea S **la región del plano definida por**

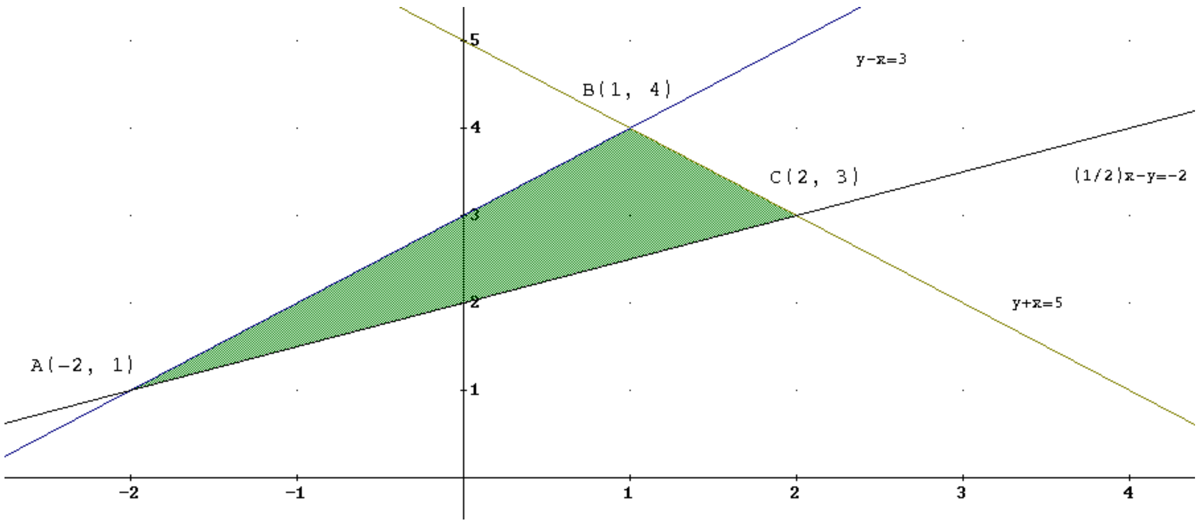
$$y + x \leq 5 \,;\, y - x \leq 3 \,;\, \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Resolución

a)



b) Evaluamos la función $f(x, y) = 2x + y$ en los vértices A, B y C.

$$f(A) = -3 \;\;;\;\; f(B) = 6 \;\;;\;\; f(C) = 7$$

El valor máximo de la función es 7 y se obtiene en el punto $C(2, 3)$.

El valor mínimo de la función es -3 y se obtiene en el punto $A(-2, 1)$.

3º) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 8$$

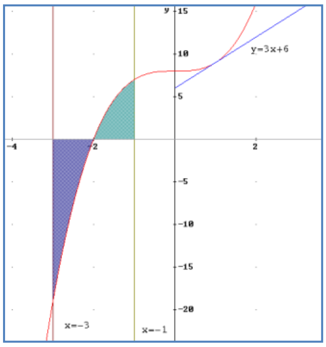
a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$**, el eje de abscisas y por las rectas** $x = -3$ **y** $x = -1$**.**

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Resolución

a) La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ y, en consecuencia, la función es creciente en $\mathbb{R}$.

El punto de corte de la función $f(x)$ con el eje de abscisas es $P(-2{,}0)$.



El área pedida es:

$$A=\left|\int_{-3}^{-2}(x^3+8\,)dx\right|+\int_{-2}^{-1}(x^3+8\,)dx=\left|\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-3}^{-2}\right|+\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=\left|4-16-\frac{81}{4}+24\right|+\frac{1}{4}-8-4+16=\frac{25}{2}\ u^2$$

b) $f'(1)=3\ ;\ f(1)=9$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es

$$t\equiv y-9=3\cdot(x-1)\quad;\quad t\equiv y=3x+6$$

4º) Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55% de varones y un 45% de mujeres. En la orquesta un 30% de los instrumentos son de cuerda. Un 25% de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$V=\text{"}Varón\ en\ la\ orquesta\text{"};\ M=\text{"}Mujer\ en\ la\ orquesta\text{"};\ C=\text{"}Tocar\ instrumento\ de\ cuerda\text{"}$

Del enunciado del problema tenemos las probabilidades siguientes:

$$p(V)=0'55\ ;\quad p(M)=0'45\ ;\quad p(C)=0'3\ ;\ \ p(C|M)=0'25$$

a) $p(M|C)\ \overset{T.Bayes}{\cong}\ \frac{p(M)\cdot p(C|M)}{p(C)}=\frac{0'45\cdot 0'25}{0'3}=0'375$

b) Aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$$p(C)=p(V)\cdot p(C|V)+p(M)\cdot p(C|M)\Leftrightarrow 0'3=0'55\cdot p(C|V)+0'45\cdot 0'25$$

de donde

$$p(C|V)=\frac{0'3-0'45\cdot 0'25}{0'55}=\frac{0'1875}{0'55}=\frac{15}{44}\cong 0'3401$$

y, por tanto,

$$p(V\cap C)=p(V)\cdot p(C|V)=0'55\cdot\frac{0'1875}{0'55}=0'1875$$

5º) La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma=50$ litros.

a) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\bar{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu=950$ litros.

Resolución

Variable aleatoria $X\sim N(\mu,50)$

a) A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2}=1{,}96$.

$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<5\Leftrightarrow 1,96\cdot\frac{50}{\sqrt{n}}<5\Leftrightarrow n>\left(\frac{1{,}96\cdot 50}{5}\right)^2\Leftrightarrow n>384{,}16$

La muestra debe ser de, al menos, 385.

b) $\mu=950$

La distribución de las medias muestras es una normal $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, en nuestro caso,

$$\bar{X}\sim N(950,\frac{50}{\sqrt{25}})\Leftrightarrow\bar{X}\sim N(950,10)$$

$$p(\bar{X}\leq 940)\ \overset{Tipifico}{\cong}\ p\left(Z\leq\frac{940-950}{10}\right)=p(Z\leq -1)=1-p(Z<1)=1-0{,}8413=0{,}1587$$