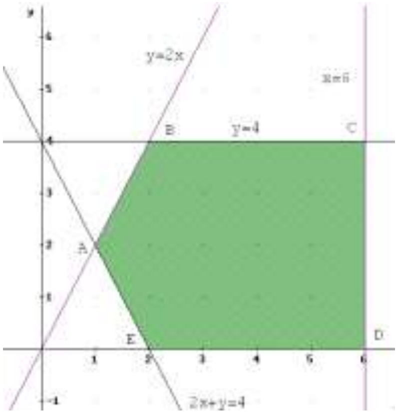
1º) Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la de tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

Resolución

Sean $x \equiv \textit{número de toneladas de pienso del tipo } A$; $y \equiv \textit{número de toneladas de pienso del tipo } B$

$$\textit{Función Objetivo}: \ \textit{minimizar } z = f(x,y) = 1000x + 2000y$$

$$\textit{Restricciones}: \quad s.a \equiv \begin{cases} y \leq 2x \\ 2x + y \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 6 \ ; \ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$



Los vértices de la región factible son los puntos:

$$A(1,2) \ ; \ B(2,4) \ ; \ C(6,4); \ D(6,0) \ ; \ E(2,0)$$

Evaluando la función objetivo en cada uno de ellos obtenemos:

$$f_A = 5000 \ ; \ f_B = 10000 \ ; \ f_C = 14000 \ ; \ f_D = 6000 \ ; \ f_E = 2000$$

El mínimo se alcanza en el punto E.

Se deben producir diariamente $\boldsymbol{x = 2}$ **toneladas de pienso del tipo** $\boldsymbol{A}$ **y ninguna de pienso del tipo** $\boldsymbol{B}$ **con un coste mínimo de 2000** $\boldsymbol{euros}$**.**

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$

a) Estúdiese el rango de A **según los valores del parámetro real** k.

b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A **para** $k = 3$.

Resolución

a) Calculamos el determinante de la matriz A: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k+1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (2-k)$ [1]

$$|A| = 0 \iff k = 2$$

Caso 1 $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{k \neq 2}$ $|A| \neq 0$. Por tanto $\boldsymbol{rg(A) = 3}$

Caso 2 $\boldsymbol{k = 2}$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $\boldsymbol{rg(A) = 2}$

b) $k = 3$ La matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y su determinante $|A| = -4$ sustituyendo en [1]. Existe A^{-1}

Calculemos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

La matriz adjunta de A es: $Adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ y su traspuesta $[Adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

La inversa de la matriz A es: $\boldsymbol{A^{-1}}=\frac{1}{|A|}\cdot[Adj(A)]^t=\frac{-1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3/4} & \mathbf{2} & \mathbf{-3/2} \end{pmatrix}$

3º) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & si\ x<2 \\ 3x+m & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x=2$.

b) Calcúlense $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Resolución

a) Obligaremos a que se cumplan las condiciones de continuidad en $x=2$:

• $f(2)=6+m$ que es siempre un número real por serlo el parámetro m.

• $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}=-4$

• $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(3x+m)=6+m$

Como los límites laterales deben ser iguales en x=2 para que la función sea continua en ese punto,

$$6+m=-4 \text{ de donde } \boldsymbol{m=-10}$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\mathbf{1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+m)=+\infty$

4º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A\cap B)=0{,}3 \qquad p(A\cap\bar{B})=0{,}2 \qquad p(B)=0{,}7$$

Calcúlese:

a) $p(A\cup B)$

b) $p(B\,/\,\bar{A})$

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Resolución

a) $p(A\cap\bar{B})=0{,}2 \Leftrightarrow p(A)-p(A\cap B)=0{,}3$ de donde $p(A)=0{,}3+p(A\cap B)=0{,}5$

Así, $\boldsymbol{p(A\cup B)}=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}5+0{,}7-0{,}3=\mathbf{0{,}9}$

b) $\boldsymbol{p(B/\bar{A})}=\frac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})}=\frac{p(B)-p(A\cap B)}{1-p(A)}=\frac{0{,}4}{0{,}5}=\frac{4}{5}=\mathbf{0{,}8}$

5º) La duración de cierto componente eléctrico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\bar{x}=8000\ h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99% para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu=8100\ h$?

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu,1000)$

a) A un nivel de confianza del 99% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2}=2{,}575$.

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(8000-2{,}575\cdot\frac{1000}{\sqrt{81}};8000+2{,}575\cdot\frac{1000}{\sqrt{81}}\right)=(7713{,}89;8286{,}11)$$

b) Tamaño muestral: $n=100$; $\mu=8100$; $Z\hookrightarrow N(0,1)$

La distribución de las medias muestrales es $\bar{X}\hookrightarrow N\left(8100,\frac{1000}{\sqrt{100}}\right)=N(8100,100)$

$$\boldsymbol{p(7904\leq\bar{X}\leq8296)}\overset{tipificando}{\cong}p\left(\frac{7904-8100}{100}\leq Z\leq\frac{8296-8100}{100}\right)=p(-1{,}96\leq Z\leq1{,}96)$$

$$=p(Z\leq1{,}96)-p(Z<-1{,}96)=p(Z\leq1{,}96)-p(Z>1{,}96)$$

$$=p(Z\leq1{,}96)-(1-p(Z\leq1{,}96))=2\cdot p(Z\leq1{,}96)-1=2\cdot0{,}975-1=\mathbf{0{,}95}$$