



1º) Se considera el siguiente sistema dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) Resuélvase para $a = 1$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a - 4$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R} \ a \neq -2 \ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\circ}$ incógnitas
Sistema Compatible Determinado (Solución única)

Caso 2 $a = -2$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A :

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^* :

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A , con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0. \text{ Por tanto } rg(A^*) = 3.$$

$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3$: Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$: $\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = -6$

Estamos en el caso 1 estudiado; por tanto el sistema es compatible determinado, tiene una única solución. Aplicando la regla de Cramer obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 1; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = -1$$

2º) Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es $f'(x) = 3x^2 + 2x$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,4)$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1,4)$.

Resolución

a) $f(x)$ es un elemento del conjunto $F(x)$ de primitivas de la función f' :

$$F(x) = \int (3x^2 + 2x) dx = x^3 + x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Como la primitiva f debe pasar por el punto $(1, 4)$, tenemos que $F(1) = 4$, de donde $2 + c = 4$ y $c = 2$
La expresión de $f(x)$ es $f(x) = x^3 + x^2 + 2$.

b) La expresión de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

En nuestro caso $x_0 = 1$; $f(x_0) = f(1) = 4$; $f'(x_0) = f'(1) = 5$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente pedida es: $t \equiv y - 4 = 5 \cdot (x - 1)$; $t \equiv y = 5x - 1$

3º) Sean las funciones reales de variable real

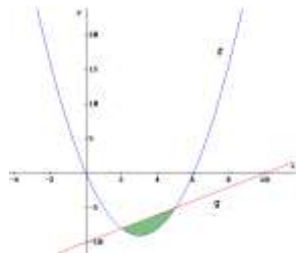
$$f(x) = x^2 - 6x \quad \text{y} \quad g(x) = x - 10$$

a) Representéense gráficamente las funciones f y g .

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g .

Resolución

a)



b) Calculamos los cortes de las funciones:

$$x^2 - 6x = x - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

El área buscada es:

$$\int_2^5 (x - 10 - (x^2 - 6x)) dx = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 10x \right]_2^5 = \frac{9}{2} u^2$$

4º) En una bolsa hay 4 bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$R_1 =$ "La primera bola es roja" ; $R_2 =$ "La segunda bola es roja"

$V_1 =$ "La primera bola es verde" ; $V_2 =$ "La segunda bola es verde"

a) $p((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)) = p(R_1 \cap R_2) + p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 0 = \frac{3}{5} = 0,6$

b) Calculamos primero la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total. Después Bayes para la probabilidad pedida:

$$p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(V_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(V_1) \cdot p(R_2/V_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0,8$$

$$p(V_1/R_2) = \frac{p(V_1) \cdot p(R_2/V_1)}{p(R_2)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} = 0,25$$

5º) El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250$ ms.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (701; 799), expresado en ms, para μ con un nivel de 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80%.

Resolución

Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 250)$

a) I. C = (701; 799)

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.

$$I. C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(\bar{x} - 1'96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \right) = (701; 799)$$

de donde obtenemos el sistema lineal $\begin{cases} \bar{x} - 1'96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 701 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 799 \end{cases}$ en las incógnitas \bar{x} y n .

Resolviendo el sistema obtenemos: Media muestral $\bar{x} = 750$ ms ; Tamaño muestral $n = 100$

b) Tamaño muestral: $n = 25$; Nivel de confianza: 80%

A un nivel de confianza del 80% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'285$.

El error máximo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'285 \cdot \frac{250}{\sqrt{25}} = 64,25$ ms