Límites y continuidad

1º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^4}$ **b)** $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{\sqrt{x^2+1}}$ **c)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-3}+2x-3}{\sqrt{4x^2+1}}$ **d)** $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+x-3}+2x-3}{\sqrt{4x^2+1}}$

2º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (2+x)^{-3x}$ **b)** $f(x) = \left(3 + \frac{2+x}{5}\right)^{-x}$ **c)** $f(x) = \left(\frac{2+x}{2x-1}\right)^{-x}$ **d)** $f(x) = \left(\frac{2+3x}{2x-1}\right)^{-x}$

3º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (2+x)^{3x-5}$ **b)** $f(x) = \left(\frac{2+x}{5}\right)^{2x-3}$ **c)** $f(x) = \left(\frac{2+x}{2x-1}\right)^{x^2-1}$ **d)** $f(x) = \left(\frac{2+3x}{2x-1}\right)^{\frac{x^3-x}{1-5x}}$

4º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{2+4x}{1+3x}\right)^{3x-5}$ **b)** $f(x) = \left(\frac{2+x}{5} \cdot \frac{x+3}{x^2}\right)^2$ **c)** $f(x) = \left(\frac{3+x^2}{2x-1} + \frac{4-x^2}{3x}\right)$ **d)** $f(x) = \left(\frac{2+3x}{3}\right)^{\frac{x^3-x}{1-5x}}$

5º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow -\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ **b)** $f(x) = \left(\frac{2+x}{5} - \frac{x^2+3}{2x}\right)^2$ **c)** $f(x) = \left(1 + \frac{3+x^2}{x^2-1} + \frac{4-4x}{3x}\right)^{\frac{x}{3}}$ **d)** $f(x) = 1 - \frac{3}{2x}$

6º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{2+4x}{1+4x}\right)^{3x-5}$ **b)** $f(x) = \left(\frac{2+5x}{5} \cdot \frac{x+3}{x^2}\right)^{2x^2}$ **c)** $f(x) = \left(3 - \frac{1+2x^2}{x^2}\right)^{3x^2-x+1}$ **d)** $f(x) = \left(\frac{2+3x}{3x}\right)^{\frac{x^2-x}{1-5x}}$

7º) Calcula los límites cuando $x \longrightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+3} - x$ **b)** $f(x) = \sqrt{4x^2-2x+1} - 2x$ **c)** $f(x) = \frac{2}{3x-\sqrt{9x^2-2x+3}}$ **d)** $f(x) = x - \frac{3}{2\sqrt{x-7}}$

8º) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-x^2}{3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2-3x}{x^4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3}{x+1}$ **e)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{2x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{4x^2+12}+4x}{x^2-1}$

9º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+1 & si \;\; x \le 1 \\ 3x-1 & si \;\; x > 1 \end{cases}$ **estudia su continuidad y represéntala gráficamente.**

10º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+1 & si \;\; x \le 1 \\ 3x-5 & si \;\; x > 1 \end{cases}$ **estudia su continuidad en** $x = 1$ **y represéntala gráficamente.**

11º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+3 & si \;\; x \le 1 \\ -x^2+4x-3 & si \;\; x > 1 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad de la función f.
b) Represéntese gráficamente la función f.

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R}\;\; x < 1,\;\; f(x) = x^2 - 4x + 3:$ continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\;\; x > 1,\;\; f(x) = -x^2 + 4x - 3:$ continua por ser función polinómica.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$ comprobando las condiciones:

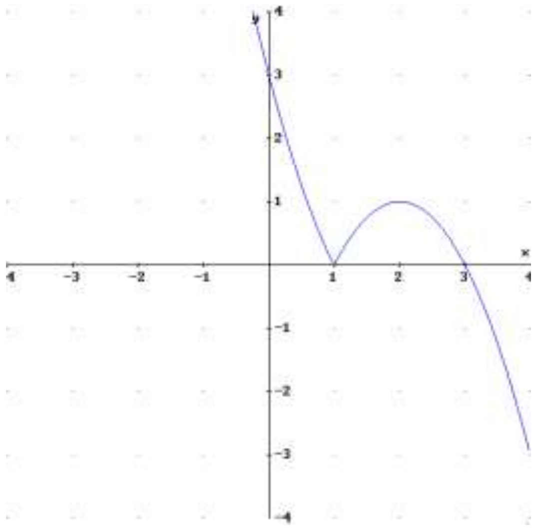
1] $f(1) = 0$

2] $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + 4x - 3) = 0 \end{cases}$ de donde $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

3] $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Por tanto la función f es continua en el conjunto de los números reales.

b) Representación gráfica



12º) Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-3}$

13º) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & si \;\; x \leq -1 \\ -3x^2 + b & si \;\; -1 < x < 1 \\ Lx + a & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense a y b, para que la función f sea continua en todos los puntos.
b) Represéntese gráficamente.

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x < 1, \;\; f(x) = 2x^2 - a$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; -1 < x < 1, \;\; f(x) = -3x^2 + b$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; x > 1, \;\; f(x) = Lx + a$: continua porque la función logarítmica lo es.

Para que la función sea continua en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

Caso 1 $x = -1$

1] $f(-1) = 2 - a$

2] $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (2x^2 - a) = 2 - a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (-3x^2 + b) = -3 + b \end{cases}$ de donde $2 - a = -3 + b$, esto es, $a + b = 5$ (1)

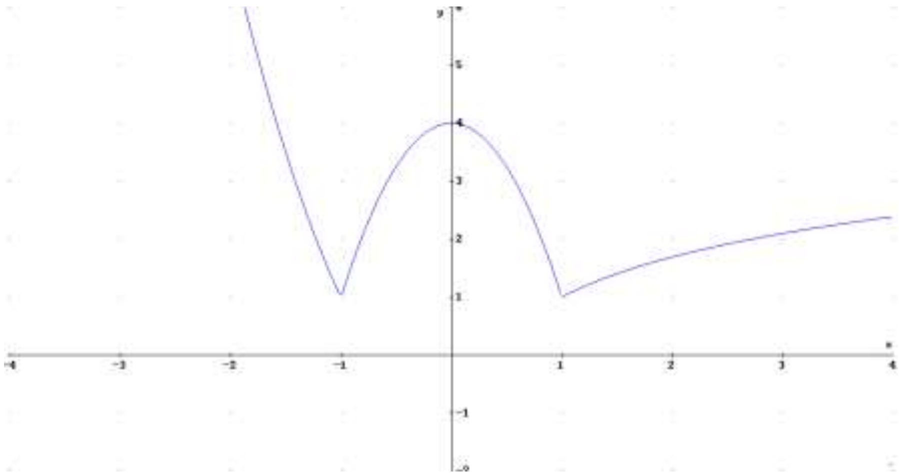
Caso 2 $x = 1$

1] $f(1) = L1 + a = a$

2] $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (-3x^2 + b) = -3 + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (Lx + a) = a \end{cases}$ de donde $a = -3 + b$ o $a - b = -3$ (2)

Para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, las expresiones (1) y (2) han de verificarse a la vez. Tenemos así el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases}$ que nos da la solución $a = 1$ y $b = 4$.

b)



14º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ \ x < 0 \\ \frac{a+3x}{x^2-4x+3} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$

Estúdiese la continuidad de f **en** $x = 0$ **para los distintos valores del parámetro** a.

Selectividad: Madrid Junio 2013 Opción B

Resolución

Estudiamos las condiciones de continuidad en $x = 0$:

1] $f(0) = \frac{a}{3}$

2] $\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{3} \end{cases}$ de donde $\frac{a}{3} = 1$ y $a = 3$.

Por tanto: $\left[\begin{array}{l} a = 3 \implies f(x) \text{ es continua en } x = 0 \\ \forall a \in \mathbb{R}\ \ a \neq 3 \implies f(x) \text{ no es continua en } x = 0 \end{array} \right.$

15º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & si\ x \leq 1 \\ ln(2x-1) & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Calcúlese a **para que la función** f **sea continua en todo** $\mathbb{R}$.

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a = 3$.

Nota: $ln\ x$ *denota al logaritmo neperiano del número* x.

Selectividad: Madrid Septiembre 2013 Opción B

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x < 1,\ \ f(x) = ax^2 - 3$: es continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x > 1,\ \ f(x) = \ln(2x-1)$: es continua por ser composición de funciones continuas.

[$f = goh$ siendo $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = 2x - 1$]

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ se deben cumplir las condiciones de continuidad de una función en un punto:

1] $f(1) = a - 3$

2] $\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} (ax^2 - 3) = a - 3 \\ \lim_{x\to 1^+} \ln(2x-1) = ln1 = 0 \end{cases}$

de donde $a - 3 = 0$; $a = 3$ es el valor buscado.

b) $a = 3$

Representación gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & si\ x \leq 1 \\ ln(2x-1) & si\ x > 1 \end{cases}$$