Estadística: Resolución de los ejercicios propuestos

1º) El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica 4 mg.
a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90% para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.
b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

Resolución

Se trata de una normal $N(\mu, 4)$.
a) Tamaño de la muestra: n=20 ; Media muestral: $\bar{x} = 22$; Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0{,}9$
A un nivel de confianza de 0,9 le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$.
El intervalo de confianza al 90% para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la marca es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(22 - 1'645 \cdot \tfrac{4}{\sqrt{20}}, 22 + 1'645 \cdot \tfrac{4}{\sqrt{20}}\right)$$

$$I.C = (20'528\,, 23'471)$$

b) El error máximo admisible en la estimación de la media poblacional, utilizando el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $1 - \alpha$, es su radio: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0'5 \Longrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{0'5}\right)^2 = \left(\frac{1'645 \cdot 4}{0'5}\right)^2 = 173'1856$$

Para que se cumplan la condición de que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0’5 mg, con un nivel de confianza del 90%, el tamaño de la muestra debe ser, al menos, de 174 cigarrillos.

2º) El número de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transportes se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.
a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:
40 28 41 102 95 33 108 20 64
Determínese un intervalo de confianza al 95% para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.
b) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90%, construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?.

Resolución

Sea X la variable aleatoria (Km recorridos): $X \sim N(\mu, 30)$

a) Calculemos la media muestral: $\bar{x} = \frac{40+28+41+102+95+33+108+20+64}{9} = \frac{531}{9} = 59$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.
El intervalo de confianza al 95% para la media μ de la variable X, número de Km recorridos por el conductor de la empresa de transportes, será:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(59 - 1'96 \cdot \tfrac{30}{\sqrt{9}}, 59 + 1'96 \cdot \tfrac{30}{\sqrt{9}}\right) = (39'4\,, 78'6)$$

b) Tamaño de la muestra: $n = 4$; Nivel de confianza: 90% ; Desviación típica de X: $\sigma = 50$
A un nivel de confianza del 90% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$.
Error de estimación de la media μ: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'645 \cdot \frac{50}{\sqrt{4}} = 41'125$

3º) El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal

con media 3,5 Mb y desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,37Mb?
b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.

Resolución

Media poblacional: $\mu = 3'5\ Mb$; Desviación típica: $\sigma = 1'4\ Mb$
El número X de Mb descargados mensualmente sigue una normal $X \backsim N(3'5, 1'4)$.
Tamaño de la muestra: $n = 49$.

a) La distribución de las medias muestrales sigue una normal $\bar{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\bar{X} \backsim N\left(3'5, \frac{1,4}{\sqrt{49}}\right) = N(3'5, 0'2)$

$p(\bar{X} < 3'37) =^{Tificamos}= p\left(Z < \dfrac{3'37 - 3'5}{0'2}\right) = p(Z < -0'65) = 1 - p(Z \leq 0'65) =$
$= 1 - 0'7422 = 0'2578.$

b) Media muestral: $\bar{x} = 3'42\ Mb$; Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0'95$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(3'42 - 1'96 \cdot \frac{1,4}{\sqrt{49}}, 3'42 + 1'96 \cdot \frac{1,4}{\sqrt{49}}\right)$$
$$I.C = (3'028, 3'812)$$

4º) La duración en horas de un determinado tipo de bombilla se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.
a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada X de esas bombillas sea inferior a 100 h?
b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada X es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90% para μ.

Resolución

Variable aleatoria: $X \backsim N(\mu, 1940)$

a) Se trata de determinar el tamaño muestral n para que el error cometido sea inferior a 100 h con una confianza del 95%.

El error máximo admisible en la estimación de la media poblacional, utilizando el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $1 - \alpha$, es su radio: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.
Desviación típica poblacional: $\sigma = 1940$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 100 \Longrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 1940}{100}\right)^2 = 1445'825$$

El tamaño de la muestra debe ser , como mínimo, de 1446 bombillas.

b) Tamaño muestral: n =225 ; Media muestral: $\bar{x} = 12415$; ; $1 - \alpha = 0'90$
A un nivel de confianza del 90% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$.
$\sigma = 1940$
El intervalo de confianza para la media μ es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(12415 - 1'645 \cdot \frac{1940}{\sqrt{225}}, 12415 + 1'645 \cdot \frac{1940}{\sqrt{225}}\right)$$
$$I.C = (12202'2467, 12627'7533)$$

5º) El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90% .

Resolución

Variable aleatoria tiempo de renovación: $X \rightsquigarrow N(\mu, 0'4)$

a) Tamaño muestral: n=400; Media muestral: $\bar{x} = 1'75$; nivel de confianza: 0'95 ; $z_{\alpha/2} = 1'96$.

El intervalo de confianza para la media es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(1'75 - 1'96 \cdot \frac{0,4}{\sqrt{400}}, 1'75 + 1'96 \cdot \frac{0,4}{\sqrt{400}}\right)$$

$$I.C = (1'7108, 1'7892)$$

b) $E \leq 0'02$; Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0'9$; $z_{\alpha/2} = 1'645$;

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0'2 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'645 \cdot 0'4}{0'02}\right)^2 = 1082'41$$

El tamaño de la muestra debe ser, como mínimo, de 1083 usuarios.

6º) Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.
a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.
b) Determínese un intervalo de confianza del 99% para μ si la media muestral es igual a 1532.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 210)$; Tamaño muestral: $n = 64$

a) $E \geq 22$

Nos piden el nivel de significación α.

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza $1 - \alpha$ se obtiene de la igualdad $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{22 \cdot \sqrt{64}}{210} = 0'8381$

Por tanto $p(Z \leq 0'8381) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0'799 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0'402$ que es la probabilidad pedida.

b) A un nivel de confianza del 99% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'575$.

Media muestral: $\bar{x} = 1532$; Desviación típica poblacional: $\sigma = 210$

El intervalo de confianza para la media μ es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(1532 - 2'575 \cdot \frac{210}{\sqrt{64}}, 1532 + 2'575 \cdot \frac{210}{\sqrt{64}}\right)$$

$$I.C = (1464'406, 1599'594)$$

7º) Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

26 27,5 31 28 25,5 30,5 32 31,5

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97%.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 2'8)$

a) Tamaño muestral: $n = 8$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'9$

A un nivel de confianza del 90% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$

Calculamos la media muestral: $\bar{x} = \frac{26+27,5+31+28+25,5+30,5+32+31,5}{8} = \frac{232}{8} = 29$

El intervalo de confianza para el peso medio de los alumnos es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(29 - 1'645 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{8}}, 29 + 1'645 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{8}}\right)$$
$$I.C = (27'372, 30'628)$$
b) $E \leq 0'9$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'97$
A un nivel de confianza del 97% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'17$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0'9 \implies n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 2'8}{0'9}\right)^2 = 45'578$$
El tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97% es $n = 46$ alumnos.

8º) Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de individuos y se obtiene el intervalo de confianza (251'6, 271'2) para μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90%.

Resolución

Variable aleatoria $X \leadsto N(\mu, 45)$
a) $I.C = (251'6,\ 271'2)$
A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.
$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\bar{x} - 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}}\right) = (251'6, 271'2)$$
de donde obtenemos el sistema lineal $\begin{cases} \bar{x} - 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 251'6 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 271'2 \end{cases}$ en las incógnitas $\bar{x}$ y n.

Resolviendo el sistema obtenemos:

Media muestral: $\bar{x} = 261'4$; Tamaño muestral: $n = 81$

b) Tamaño muestral: $n = 64$; Nivel de confianza: 90%

A un nivel de confianza del 90% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$.

El error máximo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'645 \cdot \frac{45}{\sqrt{64}} = 9'253125$

9º) La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ.
b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad 0,95.

Resolución

Variable aleatoria $X \leadsto N(\mu, 3000)$
a) Tamaño muestral: $n = 100$; Media muestral: $\bar{x} = 48000$; Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0'9$
El intervalo de confianza es:
$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(48000 - 1'645 \cdot \frac{3000}{\sqrt{100}}, 48000 + 1'645 \cdot \frac{3000}{100}\right)$

$I.C = (47506'5, 48493'5\ )$

b) Nivel de confianza: $1 - \alpha \geq 0'95$; Error: $E \leq 1000$
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 3000}{1000}\right)^2 = 34'5744$$

El tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con 0,95 es $n = 35$ neumáticos.

10º) El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.
a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.
b) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 3)$; Tamaño muestral: $n = 121$

a) Nos piden el nivel de significación α.
El valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza $1-\alpha$, se obtiene de la igualdad $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,5\cdot\sqrt{121}}{3} \approx 1'83$

Por tanto $p(Z \leq 1'83) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0'9664 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0'0672$ que es la probabilidad pedida.

b) El intervalo de confianza para la media μ es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(7 - 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{121}},\ 7 + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{121}}\right)$$

$$I.C = (6'4655, 7'5345\ )$$

11º) Se supone que el peso en kilos de los rollos de cable eléctrico producidos por una cierta empresa, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 kg. Una muestra aleatoria simple de 9 rollos ha dado un peso medio de 10,3 kg.
a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de los rollos de cable que produce dicha empresa.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestra y la media poblacional sea menor o igual que 0,2 kg, con probabilidad igual a 0,98?.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 0'5)$; Tamaño muestral: $n = 9$; Media muestral: $\bar{x} = 10'3$
a) El intervalo de confianza para el peso medio de los rollos es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(10'3 - 1'645 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{9}},\ 10'3 + 1'645 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C = (10'026, 10'574)$$

b) Error: $E \leq 0'2$; Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,98$
A un nivel de confianza de 0’98 corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'325$.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0'2 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'325 \cdot 0'5}{0'2}\right)^2 = 33'78$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 34 rollos de cable eléctrico.

12º) Se supone que el precio de un kilo de patatas en una cierta región se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 10 céntimos de euro. Una muestra aleatoria simple de tamaño 256 proporciona un precio medio del kilo de patatas igual a 19 céntimos de euro.
a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para el precio medio de un kilo de patatas en la región.
b) Se desea aumentar el nivel de confianza al 99% sin aumentar el error de la estimación, ¿ cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse?.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 10)$; Tamaño muestral: $n = 256$; Media muestral: $\bar{x} = 19$

a) A un nivel de confianza de 0’95 corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.

El intervalo de confianza para el peso medio de kilo de patatas es:

$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(19 - 1'96 \cdot \frac{10}{\sqrt{256}}, 19 + 1'96 \cdot \frac{10}{\sqrt{256}}\right) = (17'775, 20'225)$

b) El error máximo de estimación en el apartado anterior es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{10}{16} = 1'225$

Para un nivel de confianza de 0'99 el valor $z_{\alpha/2}$ es 2'575 y, si no aumentamos el error, se tiene:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575 \cdot 10}{1'225}\right)^2 = 441'86$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 442 kilos de patatas.

13º) Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.
a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%?. Razónese la respuesta.
b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 55)$; Tamaño muestral: $n = 81$; Media muestral: $\bar{x} = 320$

a) Para un grado de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1'96$.

El valor absoluto del error de estimación del gasto medio por familia en el país viene dado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{55}{\sqrt{81}} = 11'98$

Por lo tanto no se puede asegurar que el error en la estimación sea menor de 10 euros. Para que fuera posible habría que aumentar el tamaño muestral o diminuir el nivel de confianza.

b) Para asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra sea menor que 10 euros con el mismo grado de confianza del 95% tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10 \Longrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{10}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 55}{10}\right)^2 = 116'2084$$

Por tanto el tamaño de la muestra debe ser de, al menos, 117 familias.

14º) Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

9,1 4,9 7,3 2,5 5,5 6,0 3,7 5,6 4,5 7,6

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.
b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 9S%.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 2)$

a) Tamaño muestral: $n = 10$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'95$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$

Calculemos la media muestral: $\bar{x} = \frac{9{,}1+4{,}9+7{,}3+2{,}5+5{,}5+6+3{,}7+5{,}6+4{,}5+7{,}6}{10} = \frac{56{,}6}{10} = 5'67$

El intervalo de confianza para la cantidad media de agua es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(5'67 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 5'67 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$I.C = (4'43, 6'91)$$

b) $E < 1$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 2}{1}\right)^2 = 15'3664$$

El tamaño muestral mínimo es de 16 días.

15º) Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la medida del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95%.
a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.
b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?.

Resolución

Variable aleatoria $X \leadsto N(\mu, 1'32)$

a) A un nivel de confianza del 95% le corresponde $z_{\alpha/2} = 1'96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0'5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{0'5}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 1'32}{0'5}\right)^2 = 26'774$$

El tamaño mínimo de la muestra es $n = 27$.

b) Media poblacional: $\mu = 4'36$; Tamaño muestral: $n = 16$; D. Típica: $\sigma = 1'32$

La distribución de las medias muestrales sigue una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso $\bar{X} \leadsto N\left(4'36, \frac{1,32}{\sqrt{16}}\right) = N(4'36, 0'33)$

$$p(4 \leq \bar{X} \leq 5) = p(\bar{X} \leq 5) - p(\bar{X} \leq 4) =^{Tipificamos} = p\left(Z \leq \frac{5 - 4'36}{0'33}\right) - p\left(Z \leq \frac{4 - 4'36}{0'33}\right) =$$
$$= p(Z \leq 1'94) - p(Z \leq -1'09) = p(Z \leq 1'94) - [1 - p(Z \leq 1'09)] =$$
$$= 0'9738 - 1 + 0'8621 = 0'8359$$

16º) El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91 68 39 82 55 70 72 62 54 67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.
b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%.

Resolución

Variable aleatoria $X \leadsto N(\mu, 15)$

a) Tamaño muestral: $n = 10$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'9$

A un nivel de confianza del 90% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'645$

Calculemos la media muestral: $\bar{x} = \frac{91+68+39+82+55+70+72+62+54+67}{10} = \frac{660}{10} = 66$

El intervalo de confianza para el tiempo medio es:

$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(66 - 1'645 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}, 66 + 1'645 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)$

$I.C = (58'20, 73'80)$

b) $E < 5$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'95$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 5 \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 15}{5}\right)^2 = 34'5744$$

El tamaño muestral mínimo es de 35 estudiantes.

17º) El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.
a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98%? Razónese.
b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95%?.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 1)$; Tamaño muestral: $n = 64$; Media muestral: $\bar{x} = 6$; $\sigma = 1$

a) Para un grado de confianza del 98%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 2'325$.

El valor absoluto del error de estimación del gasto medio por familia en el país viene dado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'325 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}290625$

Por lo tanto si se puede asegurar que el error en la estimación sea menor de 0'5 toneladas.

b) Para asegurar que el error en la estimación sea menor que 0'5 toneladas con un nivel de confianza del 95% tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0'5 \Longrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{0'5}\right)^2 = \left(\frac{1'96}{0'5}\right)^2 = 15'3664$$

Por tanto el tamaño de la muestra debe ser de, al menos, 16 parcelas de 1 hectárea cada una.

18º) La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica 3 mm.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95%.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90%.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 3)$

a) Tamaño muestral: $n = 48$; Media muestral $\bar{x} = 36$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'95$; $\sigma = 3$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo de confianza para la longitud media de la población de gusanos es:

$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(36 - 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{48}}, 36 + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{48}}\right)$

$I.C = (35'15, 36'85)$

b) $E < 1$; Nivel de confianza $1 - \alpha = 0'90$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Longrightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'645 \cdot 3}{1}\right)^2 = 24'354225$$

El tamaño muestral mínimo es de 25 estudiantes.

19º) El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.
a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16,33 ; 19,27) **para estimar μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida**.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95%.

Solución

a) Media muestral: $\bar{x} = 17{,}8$; Tamaño muestral: $n = 16$

b) $E = 0{,}735$

Más problemas propuestos en otras pruebas de selectividad

20º) El número de pulsaciones por minuto de los habitantes de una región sigue una variable $N(\mu, 10)$. Se toma una muestra de tamaño 121 de esos habitantes y se obtiene un número medio de pulsaciones por minuto de 70.
a) Hallar un intervalo de confianza para μ con $\alpha = 0'02$.
b) Con la muestra anterior, cuánto valdría α para estimar μ con un error inferior a 2 pulsaciones por minuto?.

Solución

a) $I.C = (67'886, 72'114)$ b) $\alpha = 0'0264$

21º) En una determinada comunidad autónoma, se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Calcúlese el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de este tipo, tenga una amplitud menor que 10 días.

Solución

Al menos 500 contratos.

22º) El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95% y el error máximo fuera de 7,840.
Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.

Solución

Tamaños muestrales de 10000 y 2500 individuos.
Desviación típica $\sigma = 200$.

23º) Supongamos que el I.M.C (índice de masa corporal) en niñas de13 **años de una población sigue una distribución normal $N(\mu, 4)$.**
a) Si el 6,68% **de las citadas niñas está en riesgo de sobrepeso, es decir, su I.M.C es superior a** 22,5**, calcula el valor del I.M.C medio, μ, para las niñas de** 13 **años de la población.**
b) Si el I.M.C para las niñas de 13 **años de la población sigue una distribución normal** $N(16'5, 4)$ **y se extrae una muestra aleatoria de 64 niñas de** 13 **años de esa población, calcula la probabilidad de que el I.M.C medio de la muestra esté por debajo de** 15,3**.**

Solución

a) $\mu = 16{,}5$
b) 0,0082