1º) Calcula los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$

Solución

Máximo en $P(-6,-12)$; Mínimo en $Q(0,0)$

2º) Calcula las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en los puntos de inflexión.

Solución

Punto de inflexión: $P(1,0)$. Recta tangente en P: $t \equiv y = -3x + 3$

3º) Determina el parámetro c para que la función $f(x) = x^2 + 2x + c$ tenga un mínimo igual a 8.

Resolución

$f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$; $f''(-1) = 2 > 0$ Mínimo en $x = -1$

$f(-1) = -1 + c = 8 \Longrightarrow c = 9$

4º) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo en $x = 2$.

Solución

$a = -3$

5º) Obtener los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(2,3)$.

Solución

$a = -3$ y $b = 7$

6º) Halla el valor de b y m para que la curva $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga en el punto $A(0,1)$ una inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

Solución

$b = 0$; $m = 1$

7º) ¿Qué valores deben tomar b y c para que $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 1$ tenga un punto extremo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $x = 0$?. El extremo que se obtiene en $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

Solución

$b = 0$; $c = -3$; Mínimo en $P(1,-1)$

8º) La función $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en $x = 2/3$. Halla a y b.

Resolución

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 4$; $f''(x) = 6x - 2a$

$f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en $x = 3 \Longrightarrow f(3) = 0 \Longrightarrow 27 - 9a + 12 + b = 0$

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$

Sustituyendo en $\underbrace{27 - 9a + 12 + b = 0}_{a=2}$, obtenemos $b = -21$.

La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 21$

9º) La segunda derivada de un polinomio de segundo orden que pasa por el punto $A(1,17)$ es 4. Hallar el polinomio si se sabe que tiene un mínimo en $x = -1$.

Resolución

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ el polinomio de segundo grado que buscamos y $P'(x) = 2ax + b$ y $P''(x) = 2a$ su primera y segunda derivada respectivamente.

$P(x)$ pasa por el punto $A(1, 17)$: $P(1) = 17 \implies a + b + c = 17$ [1]

La derivada segunda de $P(x)$ es 4: $P''(x) = 2a = 4 \implies a = 2$ [2]

$P(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$: $P'(1) = 0 \implies 2a + b = 0$ [3]

El sistema de ecuaciones con las expresiones [1], [2] y [3] es:

$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ a = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ de donde $a = 2$; $b = -4$; $c = 19$ y el polinomio es $P(x) = 2x^2 - 4x + 19$

10º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, calcula a, b, c para que el punto $A(1,5)$ y el punto de abscisa $x = 2$ sean extremos relativos.

Solución

De las condiciones del ejercicio obtenemos el sistema $\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$

cuya solución es $a = 2$; $b = -9$; $c = 12$

11º) Halla a y b para que la función $f(x) = aLx + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.
Para esos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en $x = 1$ y en $x = 2$?

Solución

$a = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$

$f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$ $\left[\begin{array}{l} f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \quad \text{Mínimo en el punto de abscisa } x = 1 \\ f''(2) = \frac{-1}{6} < 0 \quad \text{Máximo en el punto de abscisa } x = 2 \end{array} \right.$

12º) Estudia el crecimiento y decrecimiento, la curvatura y puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x+1}$ **c)** $f(x) = x \cdot Lx$ **d)** $f(x) = (x-1)e^{-x}$

Solución

a) Creciente: $(-1,0) \cup (1, +\infty)$; Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (0,1)$
Convexa: $(-\infty, 0)$; Cóncava: $(0, +\infty)$

b) Decreciente en su dominio. Convexa: $(-\infty, -1)$; Cóncava: $(-1, +\infty)$

c) Decreciente: $\left(0, \frac{1}{e}\right)$; Creciente: $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Cóncava en su dominio.

d) Creciente: $(-\infty, 2)$; Decreciente: $(2, +\infty)$.
Convexa: $(-\infty, 3)$; Cóncava: $(3, +\infty)$. Punto de inflexión $P\left(3, \frac{2}{e^3}\right)$

13º) Determina en qué puntos no son derivables las funciones siguientes:

a) $f(x) = |x - 1|$ **b)** $f(x) = |x^2 - 4|$

Solución

a) $f(x)$ no es derivable en $x = 1$
b) $f(x)$ no es derivable en $x = -2$ y $x = 2$

14º) El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto viene dado por $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y el de venta de una de ellas es $\left(50 - \frac{x}{4}\right)$ euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

Resolución

El beneficio viene dado por $B(x) = x\left(50 - \frac{x}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25$

Hallamos el máximo de esta función:

$B'(x) = -x + 15;\ B'(x) = 0 \implies -x + 15 = 0 \implies x = 15$

$B''(15) = -1 < 0$ $máximo$ en $x = 15$

Por tanto deben venderse 15 unidades diarias para obtener un beneficio máximo de $B(15) = 87'5$ euros.

15º) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2}$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Selectividad: Madrid Junio 2011 Opción A

Resolución

a) Puntos que anulan el denominador: $x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$

Dominio de la función: $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$

Corte de la gráfica de f con el eje OX: $y = f(x) = 0 \implies \frac{3x}{x^2-2} = 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0$. O(0,0)

Corte de la gráfica de f con el eje OY: $x = 0 \implies y = f(0) = 0$

Asíntotas verticales: $x = \pm\sqrt{2}$

Asíntota horizontal: $y = 0$ $\left[\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2-2} = 0\right]$

b) $x = 1 \implies f(1) = -3$: $P(1, -3)$

Función derivada: $f'(x) = \frac{-3(x^2+2)}{(x^2-2)^2}$; Pendiente: $m = f'(1) = -9$

La recta tangente a la gráfica de f en P es: $t \equiv y + 3 = -9(x - 1)$; $t \equiv y = -9x + 6$

16º) Se considera el rectángulo (R) de vértices $BOAC$ con $B(O, b), 0(0, 0), A(a, 0), C(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$, y cuyo vértice C está situado en la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$.

a) Para $a = 3$, determínense las coordenadas de los vértices de (R) y calcúlese el área de (R).

b) Determínense las coordenadas de los vértices de (R) de manera que el área de (R) sea máxima.

c) Calcúlese el valor de dicha área máxima.

Selectividad: Madrid Junio 2010 Opción A Fase General

Resolución

a) $a = 3$: Como el punto $C(a, b)$ está situado en la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$, se tiene que $b = -a^2 + 12 = -9 + 12 = 3$. Así, las coordenadas de los vértices del rectángulo R son $A(3,0), B(0,3) y\ C(3,3)$, además del origen $O(0,0)$ y el área de éste $9\ u^2$.

b) Como el punto $C(a, b)$ está situado en la parábola, $b = -a^2 + 12$. El área del rectángulo de vértices $B(O, -a^2 + 12), 0(0, 0), A(a, 0)$ y $C(a, -a^2 + 12)$ viene dado por la función $f(a) = a \cdot (-a^2 + 12)$ que tenemos que maximizar. Buscamos el máximo de la función área:

Derivando, $f'(a) = -3a^2 + 12$; $f'(a) = 0 \implies a = \pm 2$; $f''(a) = -6a$; $f''(2) = -12 < 0$

Por tanto, la función área alcanza su máximo en $a = 2$ y las coordenadas de los vértices de (R) que hacen máxima su área son $B(O, 8), 0(0, 0), A(2, 0), C(2,8)$.

c) El valor del área máxima es $f(2) = 16\ u^2$.

17º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = (x^2 - 1)^2$

a) Determínense los extremos relativos de f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Selectividad: Madrid Junio 2009 Opción A

Resolución

a) Función derivada: $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 4x^3 - 4x$

Valores que anulan la derivada: $f'(x) = 0 \iff 4x(x^2 - 1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Determinamos los extremos relativos con el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \left[\begin{array}{ll} f''(-1) = 8 > 0 & \textit{Mínimo en el punto } P(-1,0) \\ f''(0) = -4 < 0 & \textit{Máximo en el punto } Q(0,1) \\ f''(1) = 8 > 0 & \textit{Mínimo en el punto } R(1,0) \end{array} \right.$$

b) $x = 3 \Longrightarrow f(3) = 64$; pendiente: $m = f'(3) = 96$

La ecuación de la recta t tangente a la gráfica de f en el punto $P(3, 64)$ es:

$$t \equiv y - 64 = 96(x - 3) \quad \text{o, lo que es lo mismo} \quad t \equiv y = 96x - 222$$

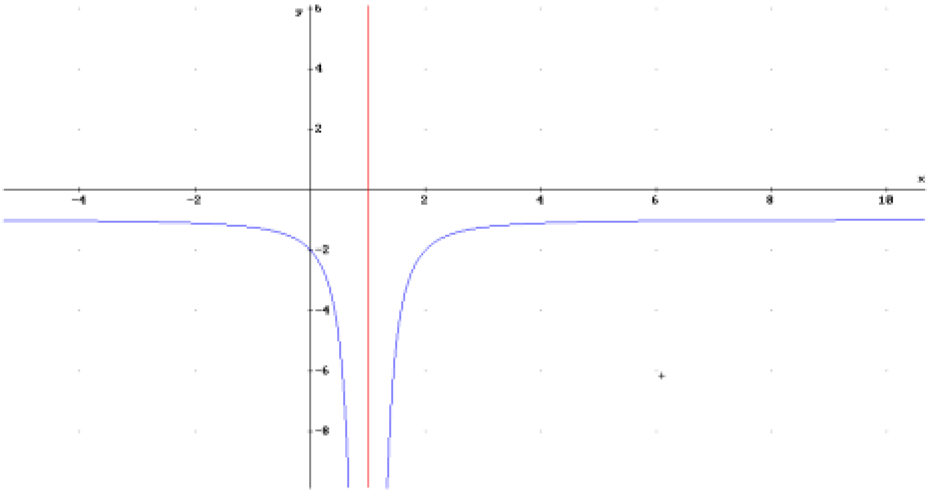
18º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínese el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Selectividad: Madrid Junio 2014 Opción B

19º) La gráfica de la función derivada f' de una función f que no está definida en $x = 1$ es la que se muestra a continuación:



¿Qué se puede decir respecto del crecimiento y decrecimiento de la función f?

20º) La derivada de una función polinómica f es la función cuadrática $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$. ¿Qué podemos afirmar sobre los extremos de la función f?