1º) Calcula el valor de $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{Dos\ filas \\ proporcionales}} 0$$

2º) Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, es decir, $A \cdot X = X \cdot A$

Solución

$$A \cdot X = X \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a+4b \\ b = 2b \\ 4a+2c = c+4d \\ 4b+2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 4d-4a \\ d = d \end{cases}$$

Las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4(d-a) & d \end{pmatrix} \quad \forall\, a, d \in \mathbb{R}$

3º) Determina la matriz inversa de A^8 siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots$

……………… $A^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$

Inversa de $B = A^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $Adj(B) = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $[Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -24 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = (A^8)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -24 & 1 \end{pmatrix}$

4º) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

$$X \cdot A - B = C \Leftrightarrow X \cdot A = B + C \Leftrightarrow X = (B+C) \cdot A^{-1}$$

Inversa de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

La solución es: $X = (B+C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5º) Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución

$x \equiv cantidad\ de\ euros\ ;\ \ y \equiv cantidad\ de\ dólares\ ;\ \ z \equiv cantidad\ de\ libras\ esterlinas$

Del enunciado se desprende que:

$y\ dólares \Leftrightarrow 1{,}1y\ euros\ \ ;\ \ z\ libras\ esterlinas \Leftrightarrow 1{,}5z\ euros$

Por tanto: $\begin{cases} x+1{,}1y+1{,}5z=264000 \\ x=2{,}2y \\ 1{,}5z=\frac{1}{10}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+11y+15z=2640000 \\ 10x-22y=0 \\ x-15z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-15z=0 \\ 10x-22y=0 \\ 10x+11y+15z=2640000 \end{cases}$$

Resolviendo por Gauss obtenemos :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 0 \\ 10 & -22 & 0 & 0 \\ 10 & 11 & 15 & 2640000 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\begin{cases} F_2-10F_1 \\ F_3-10F_1 \end{cases}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & -22 & 150 & 0 \\ 0 & 11 & 165 & 2640000 \end{pmatrix}$$

$\xleftrightarrow[F_3+\frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & -22 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 2640000 \end{pmatrix}$. Sistema escalonado: $\begin{cases} x-15z=0 \\ -22y+150z=0 \\ 240z=2640000 \end{cases}$

Resolviendo obtenemos $\begin{cases} x=165000\ euros \\ y=75000\ dólares \\ z=11000\ libras\ esterlinas \end{cases}$

6º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y+z=1} \\ \boldsymbol{x+ay+az=1} \\ \boldsymbol{x+4ay+z=2a} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Solución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 0 & 4a-2 & 0 \end{vmatrix}=(2-4a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=2(1-2a)(a-1)$$

$|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ a=1 \end{cases}$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a \neq 1/2\ y\ a \neq 1$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a=\frac{1}{2}$. $|A|=0\ ;\ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = -3/2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Al orlar el menor anterior con la cuarta columna y tercera fila tenemos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $rg(A^*) = 2$

Por tanto $rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incóg$; Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones)

Caso 3 $a = 1$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y, por tanto, $rg(A) = 2\ y\ rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Por tanto $rg(A^*) = 3 \neq rg(A). Sistema\ incompatible$

b) Resolvemos el caso 2, sistema compatible indeterminado :

Sistema equivalente: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 - t \\ x + \frac{1}{2}y = 1 - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ y restando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones tenemos $\frac{3}{2}y = -\frac{1}{2}t$ de donde $y = -\frac{t}{3}$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x = 1 - t + \frac{2t}{3} = 1 - \frac{t}{3}$

La solución del sistema es $\begin{cases} x = 1 - \frac{t}{3} \\ y = -\frac{t}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1, 2, 3, 4, 5----------- 1’5 puntos
6 ---------------------- 2’5 “