1º) Considérese la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.
b) Calcula A^{-1} para $a=-3$.
c) Despeja la matriz X en la ecuación $X^{-1}A+A=I$

Resolución

a) Determinante de la matriz A: $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a+2; \quad a+2=0 \Rightarrow a=-2$

Por lo tanto A es invertible $\forall a \in \mathbb{R}-\{-2\}$.

b) $a=-3$. En este caso la matriz es $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante $|A|=-1$

Los adjuntos son:
$A_{11}=-1;\ A_{12}=0;\ A_{13}=1\,;A_{21}=-2\,;A_{22}=1\,;A_{23}=0\,;\ A_{31}=-1\,;A_{32}=1\,;A_{33}=-2$

La matriz inversa es: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $X^{-1}A+A=I \Leftrightarrow XX^{-1}A+XA=X \Leftrightarrow A+XA=X \Leftrightarrow X-XA=A \Leftrightarrow X(I-A)=A \Leftrightarrow$
$X=A(I-A)^{-1}$

2º) El determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 es -1. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) $|3A|=-27$

b) El rango de la matriz A es 3.

c) El sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución única.

Resolución

a) $|3A|=3^3(-1)=-27$. Es verdadera.

b) Es verdadera porque al ser $|A|=-1\neq 0$, se tiene $rg(A)=3$

c) Es verdadera porque $rg(A)=3=n^{o}\ de\ incógnitas: S.C.D$

3º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x-y+\ z\ =a \\ 2x-y+\ az\ =3a \\ ax-y\ +2z\ =6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & a & 3a \\ a & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2-a^2-2+a+4+a=-a^2+2a$$

$|A| = 0 \iff -a^2 + 2a = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 0, a \neq 2\ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a = 0$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$; Por tanto $rg(A^*) = 3$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3: \ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

Caso 3 $a = 2$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3 = 2\cdot C_1}{\cong} 0$; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas: \ Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$

b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t;\ \begin{cases} x - y = 2 - t \\ 2x - y = 6 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R},$ de donde $x = 4 - t\ ;\ y = 2$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

4º) Un entusiasta de la salud quiere tener un mínimo de 4 unidades de vitamina A y 3 unidades de vitamina C al día. Cada pastilla de la marca 1 cuesta 2 € y proporciona 3

unidades de vitamina A y 1 de C. Cada pastilla de la marca 2 cuesta 4 euros y proporciona 1 unidad de vitamina A y 2 de C. La dieta le exige no tomar más de 4 pastillas, conjuntamente, de las dos marcas.
a) Plantea el problema para obtener cuántas pastillas de cada marca tendrá que comprar para cada día si quiere tener cubiertas sus necesidades básicas con el menor coste posible.
b) Dibuja la región factible y determina la solución óptima del problema.

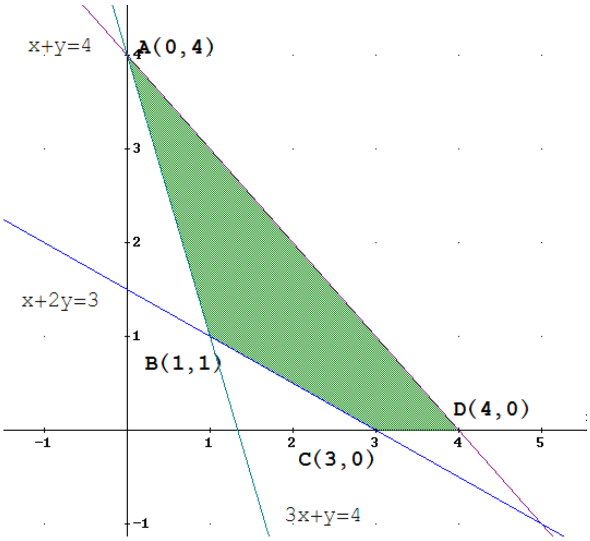
Resolución

$$x \equiv \textit{número de pastillas de la marca } 1\ ;\ y \equiv \textit{número de pastillas de la marca } 2$$

	Marca 1	Marca 2
Unidades de vitamina A	3	1
Unidades de vitamina C	1	2

a) $z = f(x,y) = 2x + 4y$ minimizar s.a $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 3x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{cases}$

b) La región factible es un polígono convexo limitado por los vértices $A(0,4), B(1,1), C(3,0) y\ D(4,0)$:



Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = 16\ ;\ f(B) = 6\ ;\ f(C) = 6\ ;\ f(D) = 8$$

El mínimo absoluto de la función es 6 y se alcanza en los vértices B y C; por tanto se debe comprar $x = 1$ pastilla de la marca 1 e $y = 1$ pastilla de la marca 2 o bien $x = 3$ pastillas de la marca 1.

Puntuación

1, 4 ---------- 3 puntos
2 ------------- 1'5 puntos
3 ------------- 2'5 puntos