1º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ **es invertible** A**.**

b) Calcula A^{-1} **para** $a = 0$

c) Para $a = 0$**, resuelve el sistema** $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolución

a) Calculamos el determinante de la matriz A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{vmatrix} = a^2 + 10a - 24$

Vemos qué valores anulan el determinante: $a^2 + 10a - 24 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ a = 2 \end{cases}$

Por lo tanto $A\ es$ invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{-12, 2\}$.

b) $a = 0$. En este caso la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ y su determinante $|A| = -24$

Los adjuntos son:

$A_{11} = 0$; $A_{12} = -8$; $A_{13} = 0$; $A_{21} = 18$; $A_{22} = -5$; $A_{23} = -3$; $A_{31} = 24$; $A_{32} = -8$; $A_{33} = 0$

La matriz inversa es: $A^{-1} = \frac{-1}{24} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 24 \\ -8 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $a = 0$, $|A| = -24$ y, por tanto $rg(A) = 3$

Al tratase de un sistema homogéneo la única solución posible es la trivial $x = y = z = 0$

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Determina la matriz X **que verifica** $A \cdot X = B - C \cdot X$

Resolución

$$A \cdot X = B - C \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X + C \cdot X = B \Leftrightarrow (A + C)X = B \Leftrightarrow X = (A + C)^{-1} \cdot B$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; (A + C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

3º) Dado el siguiente sistema dependiente del parámetro k:

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x \quad - y \; + kz = 2 \\ -x \; + y \; \; + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R} \quad k \neq -1 \; y \; k \neq 2$ Sistema Compatible Determinado (solución única)

Caso 2 $k = -1$

Sistema Incompatible (No tiene solución)

Caso 2 $k = 2$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) El sistema equivalente es $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ \qquad 3z = 4 \end{cases}$ Solución: $z = \frac{4}{3}$; $y = t$; $x = \frac{-2}{3} + t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

4º) Sea el siguiente conjunto de inecuaciones

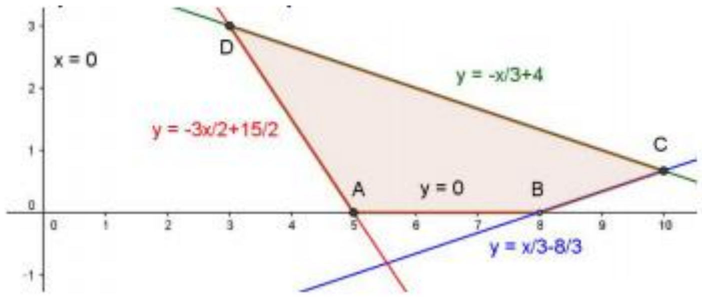
$$x - 3y \leq 8 \,;\, 3x + 2y \geq 15 \,;\, x + 3y \leq 12 \,;\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0$$

a) Dibuja el recinto del plano determinado por las inecuaciones.

b) Calcula el máximo de la función $f(x,y) = 5x + 9y$ en este recinto, indicando donde se alcanza.

Resolución

a)



b) Los vértices son: $A(5,0), B(8,0), C(10,2/3)\ y\ D(3,3)$.

$$f(A) = 25 \,;\, f(B) = 40 \,;\, f(C) = 56 \,;\, f(D) = 42$$

El máximo es 56 y se alcanza en el punto $C(10,2/3)$.

5º) Un nutricionista receta a una de sus pacientes una dieta semanal especial basada en lácteos y pescado. Cada kg de lácteos cuesta 6€ y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 de calorías; cada kg de pescado cuesta 12€, aportando 1 unidad de proteínas y 2 de calorías. La dieta le exige no tomar más de 4 kg, conjuntamente, de lácteos y pescado, y un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 de calorías.

a) Plantea el problema para obtener la combinación de ambos alimentos que tenga el coste mínimo.

b) Dibuja la región factible y determine la solución óptima del problema.

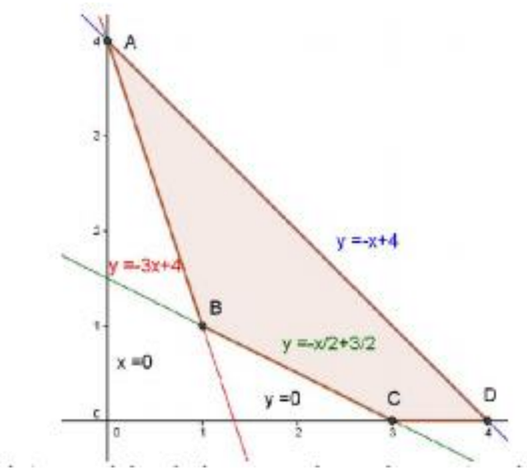
Resolución

$x \equiv Kg\ de\ lácteos\ ;\ y \equiv Kg\ de\ pescado$

	Proteína	Calorías	Precio
Lácteos "x"	3	1	6
Pescado "y"	1	2	12

a) $z = f(x,y) = 6x + 12y$ minimizar s.a $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 3x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \end{cases}$

b) La región factible es un polígono convexo limitado por los vértices $A(0,4), B(1,1), C(3,0) y\ D(4,0)$:



Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = 48\ ; f(B) = 18\ ; f(C) = 18\ ; f(D) = 24$$

Observamos que el mínimo absoluto de la función es 18 y se alcanza en los vértices B y C; por tanto en todos los puntos del segmento que los une.