1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x+2 & y-1 & z+3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x+2 & y-1 & z+3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}^{Dos\ filas\ iguales} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Razonar para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.

b) Calcula $[(AB)^t]^3$ para $k = 0$.

Resolución

a) $B^t A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$; $|B^t A^t| = \begin{vmatrix} -1+2k & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2$

$$B^t A^t \text{ tiene inversa} \Leftrightarrow |B^t A^t| \neq 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \pm 1 \quad k \in \mathbb{R}$$

b) $k = 0$. $\quad [(A \cdot B)^t]^3 = [B^t A^t]^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa A^{-1}

b) Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$

Resolución

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1} \cdot (C - 3B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$

4º) En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferentes tamaños, grandes, medianas y pequeñas, para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determina el número de cajas que hay de cada clase.

Resolución

$x \equiv número\ de\ cajas\ grandes;\ y \equiv número\ de\ cajas\ medianas;\ z \equiv número\ de\ cajas\ pequeñas$

El sistema de ecuaciones lineales es $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - 1 = y + 1 \\ 50x + 30y + 25z = 390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y = 2 \\ 50x + 30y + 25z = 390 \end{cases}$

que resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 50 & 30 & 25 & 390 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -20 & -25 & -110 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ -2y-z=-8 \\ -15z=-30 \end{cases} \qquad \text{de donde } z=2\ ;\ y=3\ ;\ x=5$$

Hay 5 cajas grandes, 3 medianas y 2 pequeñas

5º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x-y+\ z\ =a \\ 2x-y+\ az\ =3a \\ ax-y\ +2z\ =6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & a & 3a \\ a & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2-a^2-2+a+4+a=-a^2+2a$$

$|A|=0 \iff -a^2+2a=0 \iff \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$

Caso 1 $\forall a\in\mathbb{R}\ \ a\neq 0\,, a\neq 2\ \ |A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a=0$. En este caso $|A|=0\ \ y\ \ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=6\neq 0$; Por tanto $rg(A^*)=3$

$$2=rg(A)\neq rg(A^*)=3:\ \ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

Caso 3 $a=2$. En este caso $|A|=0\ \ y\ \ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}\overset{C_3=2\cdot C_1}{\triangleq} 0$; Por tanto $rg(A^*)=2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: $Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$

b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x - y = 2 - t \\ 2x - y = 6 - 2t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $x = 4 - t$; $y = 2$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1 -------------- 1 punto
2 -------------- 2 "
3 -------------- 3 "
4 -------------- 1'5 "
5 -------------- 2'5 "