1º) Calcula los siguientes límites:

Solución

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+12}+4x}{2x-1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2+12}+4x}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}+4}{2-\frac{1}{x}} = \frac{6}{2} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1-2x}{3x+2}\right) \overset{0-\left(-\frac{2}{3}\right)}{=} \frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}+\frac{3-5x}{3x}\right)^{\frac{2x}{3}} \overset{\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}}{=} 0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}+\frac{3-5x}{5x}\right)^{\frac{2x}{3}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}-\frac{3+5x}{5x}\right)^{\frac{-2x}{3}} \overset{1^{-\infty}}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x}{3}\cdot\left(\frac{3+x^2}{x^2-1}-\frac{3+5x}{5x}\right)\right]} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x}{3}\cdot\frac{-3x^2+20x+3}{5x^3-5x}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{6x^3-40x^2-6x}{15x^3-15x}\right]} = e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$

e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-\sqrt{2x+7}}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to1}\frac{(3x-\sqrt{2x+7})\cdot(3x+\sqrt{2x+7})}{(x^2-1)\cdot(3x+\sqrt{2x+7})} = \lim\limits_{x\to1}\frac{9x^2-2x-7}{(x^2-1)\cdot(3x+\sqrt{2x+7})} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(9x+7)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(3x+\sqrt{2x+7})} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{(9x+7)}{(x+1)\cdot\left(3x+\sqrt{2x+7}\right)} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

2º) Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{12x+6}{2x^2-3x-2}$

Solución

Se trata de una función racional; por tanto, es continua en el conjunto de los números reales excepto aquellos valores que anulan el denominador:

$$2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm5}{4}\begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\boldsymbol{x=2}$

1º) $f(2)$ indefinido

2º) $\lim\limits_{x\to2}\frac{12x+6}{2x^2-3x-2} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-}\frac{12x+6}{(x-2)\cdot(2x+1)} \overset{\frac{30}{0^-}}{=} -\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{12x+6}{(x-2)\cdot(2x+1)} \overset{\frac{30}{0^+}}{=} +\infty \end{cases}$ Discontinuidad de salto infinito en $x=2$

$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

1º) $f(-1/2)$ indefinido

2º) $\lim\limits_{x\to-1/2}\frac{12x+6}{2x^2-3x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to-1/2}\frac{12\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)} = \lim\limits_{x\to-1/2}\frac{6}{(x-2)} = -\frac{12}{5}$

Discontinuidad evitable en $x=-\frac{1}{2}$; verdadero valor de la función $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{12}{5}$

3º) Considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & si\ \ x<1 \\ 2 & si\ \ 1\le x\le 2 \\ -x^2+ax & si\ \ x>2\end{cases}$ **con** $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$

a) Determina el valor de a **para que la función sea continua en el punto** $x=2$.

b) Estudia la continuidad de la función para el valor de a **determinado.**

c) Representa gráficamente la función para el valor de a determinado.

Solución

a) $f(2) = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2 + ax) = -4 + 2a \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ se ha de cumplir que $-4 + 2a = 2$, de donde $a = 3$

b) $a = 3$ $f(x) = \begin{cases} 2^x & si\ \ x < 1 \\ 2 & si\ \ 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 3x & si\ \ x > 2 \end{cases}$ Estudiamos su continuidad

$\forall x \in \mathbb{R}, x < 1\ \ f(x) = 2^x$ continua por ser exponencial.

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 < x < 2\ \ f(x) = 2$ continua por ser constante.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2\ \ f(x) = -x^2 + 3x$ continua por ser polinómica.

$x = 1$

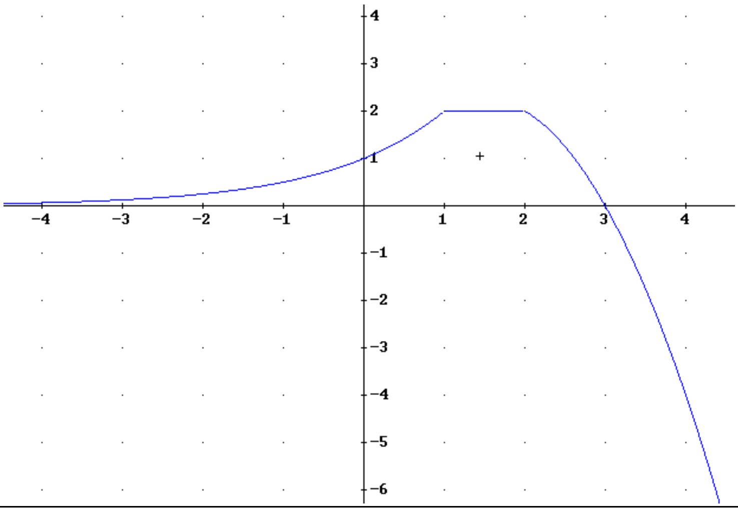
1º) $f(1) = 2$

2º) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1} 2 = 2 \end{cases}$ Continua en $x = 1$

3º) $f(1) = 2 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Para a=3 la función era continua en x=2

c)



Puntuación

1----------- 5 puntos

2 ----------- 2 "

3 ----------- 3 "