**1º) La edad de los miembros de una determinada asociación sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Sabemos que la distribución de las medias de las edades en muestras de tamaño 36 tiene como media 52 años y como desviación típica 0,5.**

**a) Halla media y desviación típica de la edad de los miembros de la asociación.**
**b) Si la asociación la componen 20000 miembros, ¿cuántos cabe esperar que superen los 60 años?.**

**Solución**

$X =$ "Edad de los miembros de la asociación"; $\quad X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$

a) La distribución de las medias muestrales es $\bar{X} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(52, 0'5)$.

Por tanto, $\begin{cases} \mu = 52 \text{ años } es\ la\ media\ de\ edad\ de\ los\ miembros\ de\ la\ asociación \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'5 \Longrightarrow \sigma = 0'5 \cdot \sqrt{36} = 3\ \ desviación\ típica \end{cases}$

b) $p(X > 60) = 1 - p(X \leq 60) = 1 - p\left(Z \leq \frac{60-52}{3}\right) = 1 - p(Z \leq 2'67) = 1 - 0'99615 = 0'00385$.

Cabe esperar que superen los 60 años $20000 \cdot 0'00385 = 77\ miembros$.

**2º) Se supone que el peso en kilos de los rollos de cable eléctrico producidos por una cierta empresa, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 kg. Una muestra aleatoria simple de 9 rollos ha dado un peso medio de 10,3 kg.**

**a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de los rollos de cable que produce dicha empresa.**
**b) Calcula el error máximo que se comete en la estimación de la media poblacional cuando se utiliza un intervalo de confianza con nivel de confianza del 98%.**

**Solución**

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 0'5)$ ; Tamaño muestral: $n = 9$ ; Media muestral: $\bar{x} = 10'3$

a)El intervalo de confianza para el peso medio de los rollos es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(10'3 - 1'645 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{9}},\ 10'3 + 1'645 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C = (10'026, 10'574)$$

b) Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0{,}98$

A un nivel de confianza de 0'98 corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'325$.

El error máximo viene dado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'325 \cdot \frac{0'5}{3} = 0'3875\ pulsaciones$.

**3º) Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de varianza igual a 3025 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.**

**a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%?. Razónese la respuesta.**
**b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?.**

**Solución**

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 55)$ ; Tamaño muestral: $n = 81$ ; Media muestral: $\bar{x} = 320$

Para un grado de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1'96$.

Varianza $\sigma^2 = 3025$. La desviación típica es $\sigma = \sqrt{3025} = 55$.

a) El valor absoluto del error máximo de estimación del gasto medio por familia en el país viene dado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{55}{\sqrt{81}} = 11'98$

Por lo tanto no se puede asegurar que el error en la estimación sea menor de 10 euros.

b) Para asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra sea menor que 10 euros con el mismo grado de confianza del 95% tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10 \Rightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{10}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 55}{10}\right)^2 = 116'2084$$

Por tanto el tamaño de la muestra debe ser de, al menos, 117 familias.

**4º) El número de pulsaciones por minuto de los habitantes de una región sigue una variable $N(\mu, 10)$. Se toma una muestra de tamaño 121 de esos habitantes y se obtiene un número medio de pulsaciones por minuto de 70.**

**a) Hallar un intervalo de confianza para $\mu$ con $\alpha = 0'02$.**
**b) Con la muestra anterior, calcula el nivel de significación $\alpha$ para estimar $\mu$ con un error inferior a 2 pulsaciones por minuto?. Interpreta el resultado.**

**Solución**

a)$n = 121$;   $\bar{x} = 70$;   $\alpha = 0'02 \Rightarrow 1 - \alpha = 0'98$. A este nivel de confianza, $z_{\alpha/2} = 2'325$.

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(70 - 2'325 \cdot \frac{10}{\sqrt{121}}, 70 + 2'325 \cdot \frac{10}{\sqrt{121}}\right)$$

$$I.C = (67'887, 72'114)$$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2 \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{22}{10} = 2'2 \Rightarrow p(Z \leq 2'2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0'9861 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$
$\alpha = 0'0278$ que es el nivel pedido.

*La probabilidad de que el error máximo cometido en la estimación sea inferior a 2 pulsaciones por minuto es* $0'9722$ .

**5º) El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):**

**91 68 39 82 55 70 72 62 54 67**

**Determínese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y poblacional sea menor que 7,8 minutos así como el intervalo de confianza para el tiempo medio.**

**Solución**

Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 15)$
Tamaño muestral: $n = 10$ ; Desviación típica $\sigma = 15$.
Calculemos la media muestral: $\bar{x} = \frac{91+68+39+82+55+70+72+62+54+67}{10} = \frac{660}{10} = 66$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7'8 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{7'8 \cdot \sqrt{10}}{15} \approx 1'644$$

$$p(Z \leq 1'644) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0'95 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 0'1$$

Por tanto el nivel de confianza es $1 - \alpha = 1 - 0'1 = 0'9$ que es la probabilidad pedida.

El intervalo de confianza para el tiempo medio es:

$$I.C = (\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E) = (66 - 7'8, 66 + 7'8) = (58'20, 73'80)$$