1] Deriva y simplifica las funciones siguientes:

a) $f(x) = 2 \cdot e^{1-2x}$

b) $f(x) = L\left(\sqrt{\frac{2}{1+x}}\right)$

c) $f(x) = x \cdot (2x-1)^{10}$

Resolución

a) $f'(x) = -4 \cdot e^{1-2x}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{2 \cdot (1+x)}$

c) $f'(x) = (2x-1)^{10} + 20x \cdot (2x-1)^9 = (2x-1)^9 \cdot (22x-1)$

2] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ \ x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$

b) Determina, si es posible, la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$

Resolución

a) *Continuidad*

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x < 0,\ \ f(x) = e^{-x}$; continua por ser función exponencial bien definida

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x > 0,\ \ f(x) = x^3 - x + 1$; continua por ser función polinómica.

$\boldsymbol{x = 0}$

1] $f(0) = e^0 = 1$

2] $\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} (e^{-x}) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} (x^3 - x + 1) = 1 \end{cases}$ $\quad por\ tanto \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

3] $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y, por tanto, continua en $\mathbb{R}$

Derivabilidad

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si\ \ x < 0 \\ 3x^2 - 1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$ está bien definida $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\boldsymbol{x = 0}$

$f'(0)^- = -1$ y $f'(0)^+ = -1$; por tanto $f'(0) = -1$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y, por tanto, derivable en $\mathbb{R}$

b) Recta tangente en $x = 0$

Pendiente de la recta tangente: $m = f'(0) = -1$; Ordenada en $x = 0$: $f(0) = 1$; Punto: $P(0,1)$

La ecuación de la recta t tangente a $f(x)$ en el punto $P(0,1)$ es $t \equiv y = 1 - x$

3] Se sabe que la función de beneficios de una empresa es de la forma $B(x) = ax + b\sqrt{x}$, siendo x el número de unidades producidas y a y b parámetros reales. Calcula, si existen, los valores de los parámetros a y b para que una producción de $x = 100$ unidades proporcione un beneficio de 50 unidades monetarias y que además sea el máximo que se puede obtener.

Resolución

$$B'(x) = a + \frac{b}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Del enunciado tenemos: $\begin{cases} B(100) = 50 & \Leftrightarrow & 100a + 10b = 50 \\ B'(100) = 0 & \Leftrightarrow & a + \frac{b}{20} = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$ **;** $\boldsymbol{b = 10}$

4] Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm³ de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en cm (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

Resolución

Sea x la anchura del rectángulo de la base de las cajas y, por tanto, $2x$ su largo.
Sea y la altura de las cajas.

El volumen de las cajas es $V = 2x^2y$ y la superficie $S = 4x^2 + 6xy$

Así, el planteamiento del problema es:

$$\begin{cases} S(x,y) = 4x^2 + 6xy \quad minimizar \\ \quad s.a \quad 2x^2y = 9000 \end{cases}$$

Despejando en la restricción, $y = \frac{4500}{x^2}$ [1]

Sustituyendo en la función objetivo tenemos $S(x) = 4x^2 + \frac{27000}{x}$ $minimizar$

$S'(x) = 8x - \frac{27000}{x^2}$; $S'(x) = 0 \iff 8x = \frac{27000}{x^2} \iff x^3 = 3375 \iff x = \sqrt[3]{3375} = 15\ cm$

Comprobamos que hemos encontrado el mínimo:

$S''(x) = 8 + \frac{54000}{x^3}$; $S''(15) > 0$; se trata de un mínimo.

De [1] tenemos $y = \frac{4500}{15^2} = 20\ cm$

Las dimensiones de las cajas de superficie mínima son:

$$\boldsymbol{Largo = 30\ cm\ ;\ Ancho = 15\ cm\ ;\ Alto = 20\ cm}$$

5] Dada la función $f(x) = \frac{x^2-9}{2x-4}$ determina:

a) Dominio, asíntotas, cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y curvatura.

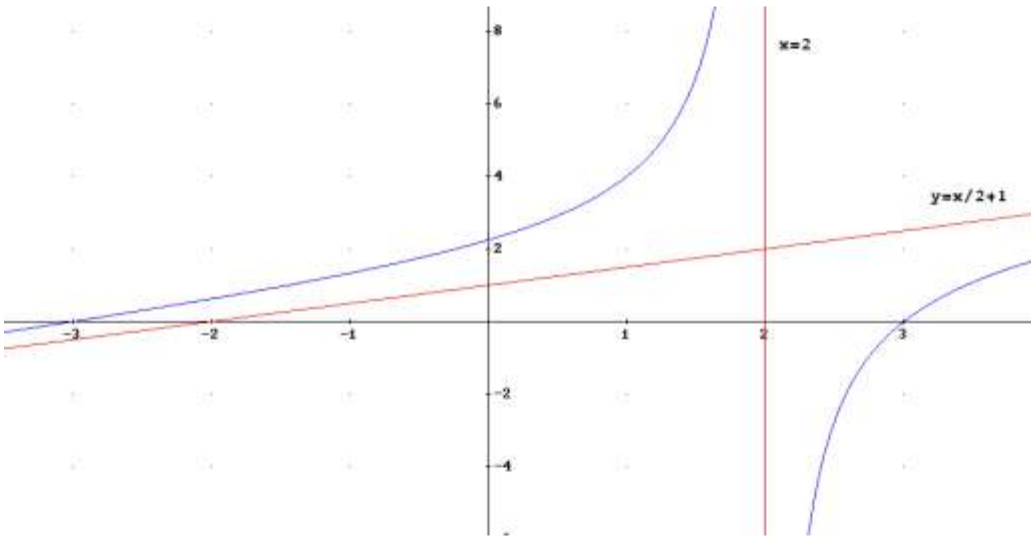
b) Esboza la gráfica de la función f.

Resolución

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $A.V:\ x = 2$; $A.H:\ No\ tiene$; $A.O: y = \frac{1}{2}x + 1$

$Cortes\ eje\ OX:\ A(3,0)\ y\ B(-3,0)$; $Corte\ eje\ OY:\ C(0, 9/4)$

$f'(x) = \frac{x^2-4x+9}{2(x-2)^2} > 0$ $Creciente\ en\ el\ dominio$; $f''(x) = \frac{-5}{(x-2)^3} \begin{cases} > 0 \ (-\infty, 2)\ Cóncava \\ < 0 \ (2, +\infty)\ Convexa \end{cases}$



Puntuación

1 ---------------------- 1,5 puntos
2, 3, 4 ---------------- 2 “
5 ---------------------- 2,5 “