1º) Calcula $f'(1)$ y $g'(0)$ siendo:

a) $f(x) = \frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}$

b) $g(x) = 2 \cdot L\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right)$

Resolución

?) $f'(x) = \dfrac{-x-(3-x)}{x^2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{-3}{x^2} - \dfrac{1}{3} \Rightarrow f'(1) = -3 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{10}{3}$

b) $g'(x) = 2 \cdot (e^{-x}+1) \cdot \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} \Rightarrow g'(0) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

2º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax-3} & si\ x \le 1 \\ x + L(2x-1) & si\ x > 1 \end{cases}$

Estudia su derivabilidad en $x = 1$ según los valores del parámetro real a.

Resolución

Continuidad en $x = 1$:

1º) $f(1) = \frac{1}{a-3}$

2º) $\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{ax-3} = \frac{1}{a-3} \\ \lim_{x\to 1^+} [x + L(2x-1)\ ] = 1 \end{cases}$ $\quad de\ donde\ \frac{1}{a-3} = 1\ \ y\ \ a = 4$

$$f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1\ si\ y\ solo\ si\ a = 4$$

Para $a = 4$ estudiamos la derivabilidad en $x = 1$:

$$f\,'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(4x-3)^2} & si\ x < 1 \\ 1 + \dfrac{2}{2x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$f'^{-}(1) = -4 \ne f'^{+}(1) = 3$$

La función no es derivable en $x = 1$ para ningún valor de a.

3º) Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y. ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima?

Resolución

$x = longitud\ del\ lado\ de\ uno\ de\ los\ triángulos\ equiláteros$

$y = longitud\ del\ lado\ del\ otro\ de\ los\ triángulos\ equiláteros$

Los triángulos están construidos con $3x\ cm$ y $3y\ cm$ de alambre cada uno (perímetro)

El área de cada triángulo es $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$ y $\frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y$ respectivamente

El problema es: $S(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (x^2 + y^2)$ minimizar

$s.a\ \ 3x + 3y = 60$

Despejando la incógnita y de la restricción tenemos que $y = 20 - x\ \ [1]$ y sustituyendo en la función objetivo $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (x^2 + (20-x)^2)$

Derivando, obtenemos $S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2x - 2 \cdot (20-x)) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4x - 40)$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = 10\ cm$$

Como $S''(x) = 30 > 0$, el valor $x = 10$ se trata de un mínimo de la función suma de áreas.

De $[1]$, obtenemos el valor $y = 10$

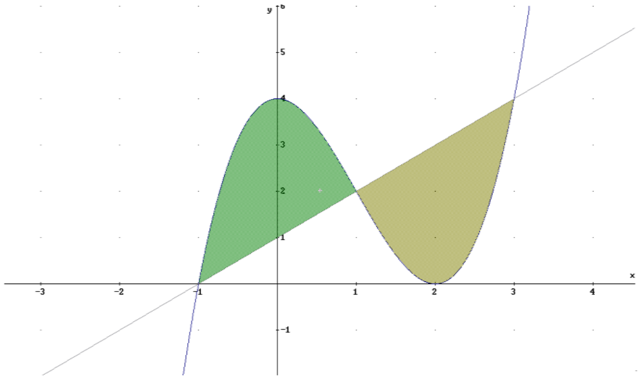
Por tanto, los valores de los lados de ambos triángulos que minimizan la suma de sus áreas son:

$$x = 10\ cm\ \ e\ \ y = 10\ cm$$

El alambre se debe dividir en seis trozos iguales de 10 cm cada uno

4º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.
b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x + 1$.

Resolución



a) Punto de inflexión:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$f''(x) = 6x - 6$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Como $f'''(x) = 6$, se tiene que $f'''(1) \neq 0$
$P(1,2)$ es punto de inflexión de la función.
Recta tangente en P:
Pendiente $m = f'(1) = -3$
$t \equiv y - 2 = -3 \cdot (x - 1)$

$$t \equiv y = -3x + 5$$

b) $A = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 4 - (x+1))\, dx + \int_1^3 \left(x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 4)\right)\, dx = 8\, u^2$

5º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}\, dx$

b) $\int \frac{Lx}{2x}\, dx$

Resolución

a) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{e^{-2x}}{4} + c$

b) $\int \frac{Lx}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{Lx}{x}\, dx = \frac{L^2\, x}{4} + c$

6º) Dada la función $f(x) = \frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}$ determina:
a) Sus asíntotas.
b) Una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que pase por el punto de coordenadas $A(1,0)$

Resolución

a) Asíntotas verticales: $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}\right) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}\right) = +\infty$

La recta $x = 0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal: No tiene porque $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}\right) = \mp\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3-x}{x^2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ y $n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3-x}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x}{3}\right) = -1$

La recta $y = \frac{-x}{3} - 1$ es asíntota oblicua

b) $F(x) = \int \left(\frac{3-x}{x} - \frac{x}{3}\right)\, dx = 3 \cdot Lx - x - \frac{x^2}{6} + c$ es el conjunto de primitivas de $f(x)$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow 3L1 - 1 - \frac{1}{6} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{7}{6}$

La primitiva buscada es $F(x) = 3 \cdot Lx - x - \frac{x^2}{6} + \frac{7}{6}$

Puntuación

1 --------------- 1 punto
2, 5 ------------ 1’5 puntos
3, 4, 6 --------- 2 “