1º) Deriva y simplifica:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2e^{5x} - x$

b) $f(x) = L\left(\frac{2}{e^x - 1}\right)$

Resolución

a) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 10e^{5x} - 1$

b) $f'(x) = \frac{e^x - 1}{2} \cdot \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x}{e^x - 1}$

2º) Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V = x^2y + 27y + 20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

Resolución

$x \equiv euros\ invertidos\ en\ televisión \quad ; \quad y \equiv euros\ invertidos\ en\ radio$

El planteamiento del problema es: $\begin{cases} V = x^2y + 27y + 20\ \ maximizar \\ s.a \quad x + y = 15 \end{cases}$

$y = 15 - x \quad y, sustituyendo, \quad V(x) = x^2 \cdot (15 - x) + 27 \cdot (15 - x) + 20$

Simplificando, $V(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 425$

$V'(x) = -3x^2 + 30x - 27\ ; V'(x) = 0 \iff -3x^2 + 30x - 27 = 0 \iff x^2 - 10x + 9 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right.$

$$V''(x) = -6x + 30 \begin{cases} V''(9) = -24 < 0\ \boldsymbol{Máximo\ en\ x = 9 : y = 6} \\ V''(1) = 24 > 0\ \ Mínimo\ en\ x = 1\ \ ; y = 14 \end{cases}$$

$V(9,6) = 9^2 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 20 = 668$

Por tanto, debemos invertir 9000 € en televisión y 6000 € en radio con un valor máximo de ventas de 668000 unidades.

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a - bx}$

a) Determina los valores de a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de f en $x = 6$ sea horizontal.

b) Para $a = 1$ y $b = -1$, determina su curvatura, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su representación gráfica.

Resolución

a) Del enunciado, $f(2) = -4$ y $f'(6) = 0$

$f'(x) = \frac{2x\cdot(a-bx) + b\cdot x^2}{(a-bx)^2} \quad \begin{cases} f(2) = -4 \iff \frac{4}{a - 2b} = 4 \implies a - 2b = 1 \\ f'(6) = 0 \iff \frac{12\cdot(a-3b)}{(a-2b)^2} = 0 \implies a - 3b = 0 \end{cases}$ de donde $\boldsymbol{a = 3}$; $\boldsymbol{b = 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

Curvatura y puntos de inflexión

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2)\cdot(1+x)^2 - (x^2+2x)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \begin{cases} < 0\ \ en\ (-\infty, \boldsymbol{-1})\ \boldsymbol{Convexa} \\ > 0\ \ en\ (\boldsymbol{-1}, +\infty)\ \boldsymbol{Cóncava} \end{cases}$$

Como $x = -1$ no está en el dominio de la función, ésta **no tiene puntos de inflexión**.

Asíntotas

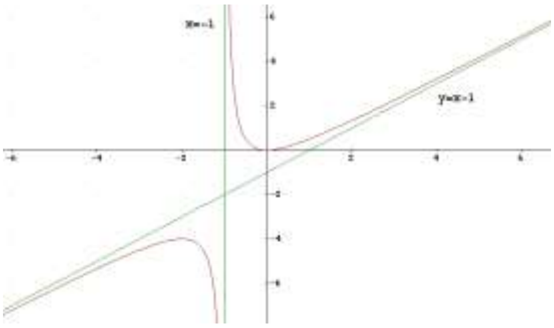
$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{1+x}\begin{cases}\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{1+x}=-\infty\\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{1+x}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, **la recta $x=-1$ es asíntota vertical.**

Como $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x}=\pm\infty$, **no hay asíntota horizontal**.

$$y=mx+n\begin{cases}m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+x^2}=1\\ n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{1+x}=-1\end{cases}$$

La recta $y=x-1$ es asíntota oblicua.

Representación gráfica



4º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\frac{3-e^{-2x}}{e^x}\,dx$

b) $\int\frac{1+x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

Resolución

a) $\int\frac{3-e^{-2x}}{e^x}\,dx=3\cdot\int e^{-x}\,dx-\int e^{-3x}\,dx=-3e^{-x}+\frac{e^{-3x}}{3}+c$

b) $\int\frac{1+x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2+2x}{(x^2+2x+5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int(x^2+2x+5)^{-2}\cdot(2+2x)\,dx=\frac{-1}{2\cdot(x^2+2x+5)}+c$

5º) Calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x)=\frac{5}{\sqrt{1-2x}}$ que cumple $F(0)=7$

Resolución

$F(x)=\int\frac{5}{\sqrt{1-2x}}\,dx=\frac{-5}{2}\cdot\int\frac{-2}{\sqrt{1-2x}}\,dx=-5\cdot\sqrt{1-2x}+c$; $F(0)=7\Leftrightarrow -5+c=7\,;c=12$

La primitiva es $F(x)=5\cdot\sqrt{1-2x}+12$

6º) Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyo trazado viene dado por las funciones $f(x)=-x^2+9x-8$ y $g(x)=2x-2$. Si se mide en metros:

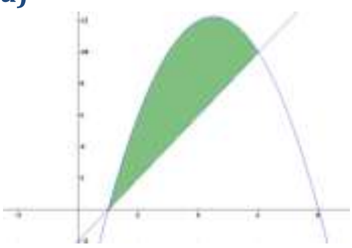
a) Representa la parcela

b) ¿Qué superficie tiene la parcela?

c) Si el 70% de la superficie de la parcela se vende como suelo urbano a 420 € el metro cuadrado, el 20% se tiene que donar al ayuntamiento y el resto se vende como suelo rústico a 45 € el metro cuadrado, ¿cuál es el valor de la parcela?

Resolución

a)



b) Cortes de ambas funciones: $2x-2=-x^2+9x-8\Leftrightarrow$

$$x^2-7x+6=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=6\end{cases}$$

Área$=\int_1^6(-x^2+9x-8-(2x-2))\,dx=\int_1^6(-x^2+7x-6)\,dx=$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-6x\right]_1^6=\frac{\mathbf{125}}{\mathbf{6}}\,\boldsymbol{m^2}$$

c) $0'7\cdot\frac{125}{6}\cdot 420+0'1\cdot\frac{125}{6}\cdot 45=6125+93'75=$ **6218,75 euros**