1º) Sean A y B dos sucesos tales que:

$$p(A \cap B) = 0{,}45 \qquad p(A) = 0{,}7 \qquad p(B) = 0{,}5$$

Se pide:
a) $p(B|A)$
b) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$
c) ¿Son independientes los sucesos A y B?. Razona la contestación.

Resolución

a) $\boldsymbol{p(B|A)} = \frac{p(B\cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}45}{0{,}7} \cong 0{,}643$

b) $\boldsymbol{p(\bar{A} \cap \bar{B})} = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}45] = \mathbf{0{,}25}$

c) $0{,}45 = p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35 \implies$ **A y B no son independientes**

2º) Una cierta instalación de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0,95 y de que se active el segundo es 0,90.
a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active solo uno de los indicadores.
b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

Resolución

$I_1 =$ "Se activa el indicador 1" ; $p(I_1) = 0{,}95$
$I_2 =$ "Se activa el indicador 2" ; $p(I_2) = 0{,}9$

a) necesitamos $p(I_1 \cap I_2) = p(I_1) \cdot p(I_2) = 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}855$

$\boldsymbol{p((I_1 \cap \bar{I_2}) \cup (\bar{I_1} \cap I_2))} = p(I_1) - p(I_1 \cap I_2) + p(I_2) - p(I_1 \cap I_2) =$

$= p(I_1) + p(I_2) - 2 \cdot p(I_1 \cap I_2) = 0{,}95 + 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}855 = 1{,}85 - 1{,}77 = \mathbf{0{,}14}$

b) $\boldsymbol{p(I_1 \cup I_2)} = p(I_1) + p(I_2) - p(I_1 \cap I_2) = 0{,}95 + 0{,}9 - 0{,}855 = 1{,}85 - 0{,}855 = \mathbf{0{,}995}$

También $\boldsymbol{p(I_1 \cup I_2)} = 1 - p(\overline{I_1 \cup I_2}) = 1 - p(\bar{I_1} \cap \bar{I_2}) = 1 - p(\bar{I_1}) \cdot p(\bar{I_2}) = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 = \mathbf{0{,}995}$

3º) De los usuarios de móvil de un país, se sabe que un 30% tiene móvil marca Sanso con sistema operativo Andry. De los que tienen un móvil marca Sanso, el 40% usa el sistema operativo Andry. Si se selecciona al azar una persona con móvil en este país:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que su móvil sea marca Sanso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su móvil sea marca Sanso, pero no use el sistema operativo Andry?

Resolución

$S =$ "*poseer móvil marca Sanso*" ;
$A =$ "*móvil con sistema Andry*";
Del enunciado tenemos: $p(S \cap A) = 0{,}3$ y $p(A|S) = 0{,}4$

a) $p(A|S) = \frac{p(A\cap S)}{p(S)} = 0{,}4 \implies \boldsymbol{p(S)} = \frac{p(A\cap S)}{0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \mathbf{0{,}75}$

b) Como $p(A|S) = 0{,}4$ tenemos que $p(\bar{A}|S) = 0{,}6$

$\boldsymbol{p(S \cap \bar{A})} = p(S) \cdot p(\bar{A}|S) = 0{,}75 \cdot 0{,}6 = \mathbf{0{,}45}$

4º) Una prueba para determinar cierta contaminación del agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0,05 de falsos positivos, esto es, casos en los que el agua está libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0,99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0,99. Si se realizara una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

Resolución

$TC =$ "*el test dice que el agua está contaminada*"

$C =$ "*El agua está contaminada*"

Del enunciado tenemos: $p(TC|\bar{C}) = 0{,}05$; $p(TC|C) = 0{,}99$; $p(\bar{C}) = 0{,}99$

$$\boldsymbol{p(\bar{C}|TC)} = \frac{p(\bar{C}) \cdot p(TC|\bar{C})}{p(TC)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}05}{p(C) \cdot p(TC|C) + p(\bar{C}) \cdot \ \ p(T|\bar{C})} = \frac{0{,}0495}{0{,}01 \cdot 0{,}99 + 0{,}99 \cdot 0{,}05} \cong \mathbf{0,833}$$

5º) Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?

b) Si la compra supera 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

Resolución

$V =$ "*Pagar con tarjeta de crédito V*" ; $p(V) = \frac{400}{750} = \frac{8}{15}$

$MC =$ "*Pagar con tarjeta de crédito MC*" ; $p(MC) = \frac{350}{750} = \frac{7}{15}$

$S =$ "*La venta supera los 150 euros*" ; $p(S|V) = \frac{150}{400} = \frac{3}{8}$; $p(S|MC) = \frac{300}{350} = \frac{6}{7}$

a)

$$\boldsymbol{p(S)} = p(V) \cdot p(S|V) + p(MC) \cdot p(S|MC) = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{7} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

b)

$$\boldsymbol{p(MC|S)} \overset{Bayes}{=} \frac{p(MC) \cdot p(S|MC)}{p(S)} = \frac{\frac{7}{15} \cdot \frac{6}{7}}{\frac{3}{5}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$