1º)
a) El tiempo diario que los estudiantes de Bachillerato de Madrid dedican al estudio en las dos semanas previas al inicio de los exámenes de Selectividad de la convocatoria de junio, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 15 minutos. Para estimar el tiempo medio se elige una muestra de 300 alumnos. ¿Con qué nivel de confianza debe realizarse la estimación si el error cometido es de 1,88 minutos?

b) Con vistas a la convocatoria de septiembre del mismo año se realiza un análisis similar. El tiempo diario que los estudiantes destinan al estudio las dos semanas anteriores al inicio de los exámenes, sigue una distribución normal con desviación típica 11 minutos. Con una muestra aleatoria de 150 alumnos se ha obtenido un tiempo medio de 173 minutos. Obtener un intervalo de confianza del 93% para el tiempo medio de estudio.

Resolución

a) Variable aleatoria $X \backsim N(\mu, 15)$; Tamaño muestral: $n = 300$; $E = 1'88$

Nos piden el nivel de confianza $1 - \alpha$.

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ correspondiente al nivel de confianza $1 - \alpha$ se obtiene de la igualdad $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1{,}88 \cdot \sqrt{300}}{15} = 2{,}17$

Así: $p(Z \leq 2{,}17) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0{,}9850 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0{,}03 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0{,}97$

Por tanto, la estimación debe realizarse con un nivel de confianza del 97%.

b) Variable aleatoria $X \backsim N(\mu, 11)$; Tamaño muestral: $n = 150$

A un nivel de confianza del 93% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}81$.

Media muestral: $\bar{x} = 173$; Desviación típica poblacional: $\sigma = 11$

El intervalo de confianza para la media μ es:

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(173 - 1{,}81 \cdot \frac{11}{\sqrt{150}}, 173 + 1{,}81 \cdot \frac{11}{\sqrt{150}}\right)$$

$$\boldsymbol{I.C = (171'37, 174'63)}$$

2º) En una determinada comunidad autónoma, se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Calcúlese el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de este tipo, tenga una amplitud menor que 10 días.

Resolución

Variable aleatoria $X \backsim N(\mu, 57)$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Si la amplitud del intervalo debe tener una amplitud menor que 10, el error máximo será 5 días y, por tanto tendremos: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 5 \Longrightarrow \sqrt{n} > \frac{1{,}96 \cdot 57}{5} \Longrightarrow n > 499{,}25$

El número mínimo de contrato es 500

3º) Una empresa produce dispositivos electrónicos con pantalla HD; la resolución de estas pantallas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\boldsymbol{\sigma = 20}$ píxeles. Se tomó una muestra de aleatoria de 100 dispositivos electrónicos y se obtuvo el intervalo de confianza (1076’ 08,1083’92) **para la resolución media de de las pantallas.**

a) Calcula el valor de la resolución media de las pantallas de los 100 dispositivos electrónicos elegidos para la muestra.
b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.
c) ¿Cómo podemos aumentar la amplitud del intervalo del confianza?
d) Sin calcular el intervalo de confianza, ¿se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 1076'08$ píxeles con un nivel de confianza del 90%?

Resolución

Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 20)$; $n = 100$; $I.C = (1076'08, 1083'92)$

a) El intervalo de confianza para la media μ es

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (1076'08, 1083'92)$$

$\bar{x}$ es el punto medio de dicho intervalo; por tanto $\boldsymbol{\bar{x} = \frac{1076'08+1083'92}{2} = 1080}$

b) $\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1083,92 \Longrightarrow 1080 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{10} = 1083,92 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Así: $p(Z \leq 1,96) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0,95$

El intervalo se ha obtenido con un nivel de confianza del 95%

c) La amplitud del intervalo de confianza la podemos aumentar **disminuyendo el tamaño de la muestra o aumentando el nivel de confianza**.

d) Si pasamos del 95% al 90% de confianza el valor crítico $z_{\alpha/2}$ disminuye y, en consecuencia, también la amplitud del intervalo; por tanto el valor $\mu = 1076'08$ quedaría fuera del mismo **no pudiéndose admitir** que la media poblacional sea $\mu = 1076'08$ píxeles con un nivel de confianza del 90%?

4º) El tiempo, en minutos, dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91 68 39 82 55 70 72 62 54 67

a) Determínese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y poblacional sea menor que 7,8 minutos así como el intervalo de confianza para el tiempo medio.
b) Si el tiempo dedicado a escuchar música por los estudiantes de secundaria de la ciudad sigue una $N(70, 10)$ y se extrae una muestra aleatoria de 64 estudiantes de esa población, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de la muestra esté por debajo de 60 minutos.

Resolución

a) Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 15)$

Tamaño muestral: $n = 10$; Desviación típica $\sigma = 15$.

Calculemos la media muestral: $\bar{x} = \frac{91+68+39+82+55+70+72+62+54+67}{10} = \frac{660}{10} = 66$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7'8 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{7'8 \cdot \sqrt{10}}{15} \approx 1'644$$

$$p(Z \leq 1'644) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0'95 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0'1$$

Por tanto el nivel de confianza es $1 - \alpha = 1 - 0'1 = 0'9$ que es la probabilidad pedida.

El intervalo de confianza para el tiempo medio es:

$$I.C = (\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E) = (66 - 7'8, 66 + 7'8) = (\mathbf{58'20, 73'80})$$

b) $X \sim N(70, 10)$; $n = 64$

La distribución de las medias muestrales es $\bar{X} \sim N\left(70, \frac{10}{8}\right) = N(70, 1'25)$

$$\boldsymbol{p(\bar{X} < 60) = p\left(Z < \frac{60 - 70}{1'25}\right) = p(Z < -8) = 1 - p(Z \leq 8) \approx 1 - 1 = 0}$$

La probabilidad es prácticamente nula