1º) Calcula $f'(1)$ en cada caso:

a) $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{x}{3}$

b) $f(x)=L\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$

Resolución

a) $f'(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{3}$; $f'(1)=-3-\frac{1}{3}=-\frac{10}{3}$

b) $f'(x)=(e^x-1)\cdot\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-e^x}{e^x-1}$; $f'(1)=\frac{-e}{e-1}$

2º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases} ax-3 & si\ x\le 1 \\ L(2x-1) & si\ x>1\end{cases}$

Estudia la derivabilidad de la función f en $x=1$ según los valores del parámetro real a.

Resolución

Continuidad en $x=1$:

1º) $f(1)=a-3$

2º) $\lim_{x\to 1} f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}(ax-3)=a-3 \\ \lim_{x\to 1^+} L(2x-1)=0\end{cases}$ $\qquad$ *de donde* $a-3=0$ *y* $a=3$

$$f(x)\ es\ continua\ en\ x=1\ si\ y\ solo\ si\ a=3$$

Para $a=3$ estudiamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & si\ x<1 \\ \dfrac{2}{2x-1} & si\ x>1\end{cases}$$

$$f'^-(1)=3\neq f'^+(1)=2$$

La función no es derivable en $x=1$ para ningún valor de a.

3º) Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Resolución

$x=$ *número de cepas que se añaen a la finca*

Función objetivo: $P(x)=(1200+x)\cdot(16-0,01x)$ **maximizar**

$$P(x)=-0,01x^2+4x+19200 \text{ maximizar}$$

$P'(x)=-0,02x+4$

$$-0,02x+4=0\Leftrightarrow x=200$$

Como $P''(x)=-0,02<0$ se trata de un máximo.

El número de cepas que se deben añadir a las existentes para maximizar la producción es de 200 cepas con producción máxima de 19600 Kg de uva.

4º) Se considera la función $f(x)=\frac{x^2}{a-bx}$

a) Determina los valores de a y b para los que la función alcance un máximo relativo en el punto $P(-2,-4)$.

b) Para $a=1$ y $b=-1$, determina su curvatura, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su representación gráfica.

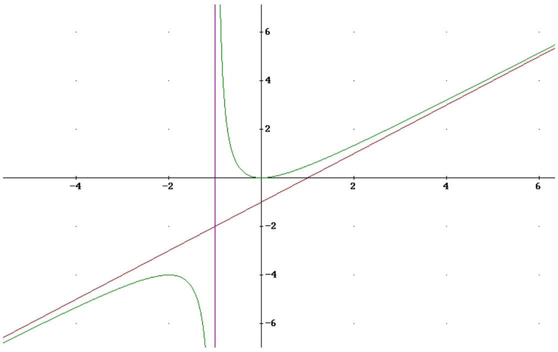
Resolución

$$f'(x)=\frac{2ax-bx^2}{(a-bx)^2}$$

a) $\left.\begin{matrix} f(-2)=-4 \\ f'(-2)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{4}{a+2b}=-4 \\ \frac{-4a-4b}{(a+2b)^2}=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a+2b=-1 \\ a+b=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow a=1 \;;\; b=-1$

b) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$

A.V: $x=-1$; A.O: $y=x-1$ $\quad (-\infty,-1)$ *Convexa* ; $(-1,+\infty)$ *Cóncava*



5º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1-e^{-x}}{e^x}\,dx$

b) $\int \frac{1+x}{(x^2+2x-5)^2}\,dx$

Resolución

a) $\int \frac{1-e^{-x}}{e^x}\,dx=\int e^{-x}\,dx-\int e^{-2x}\,dx=-e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}+c=-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2e^{2x}}+c$

b) $\int \frac{1+x}{(x^2+2x-5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int (x^2+2x-5)^{-2}\cdot(2+2x)\,dx=\frac{-1}{2\cdot(x^2+2x-5)}+c$

6º) Determina el valor de $a>1$ sabiendo que

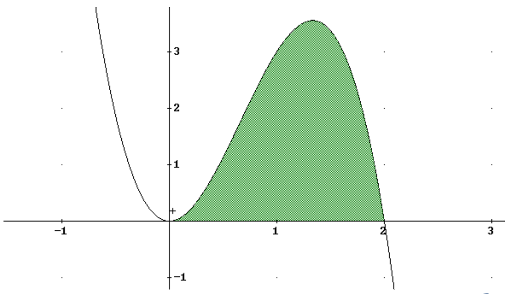
$$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx=3$$

Resolución

$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx=3 \Leftrightarrow \left[\sqrt{2x-1}\right]_1^a=3 \Leftrightarrow \sqrt{2a-1}-1=3 \Leftrightarrow \sqrt{2a-1}=4 \Leftrightarrow 2a-1=16 \Leftrightarrow a=\frac{17}{2}$

7º) Calcula el área limitada por la curva $y=6x^2-3x^3$ y el eje de abscisas.

Resolución



$$Área=\int_0^2 (6x^2-3x^3)dx=\left[2x^3-\frac{3x^4}{4}\right]_0^2=4\,u^2$$

Puntuación

Cálculo diferencial

1 --------------- 1 punto

2, 3 ----------- 1’5 “

4 -------------- 2 “

Cálculo integral

5, 6 ------------------ 1 punto

7 ------------------ 2 “