Matemáticas Aplicadas II. Probabilidad. Ev3. Ej1. Abril 16

1º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0{,}4 \;\; ; \;\; p(B|A) = 0{,}25 \;\; ; \;\; p(\bar{B}) = 0{,}75$$

a) **¿Son A y B independientes? Razona la contestación.**
b) **Calcula $p(A \cap B)$ y $p(A \cup B)$**
c) **Calcula $p(B \,/\, \bar{A})$**

Resolución

a) Como $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25 = p(B|A)$, los sucesos A y B son independientes.

b) $p(B|A) = 0{,}25 \Longrightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = 0{,}25 \Longrightarrow p(A \cap B) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}55$

c) $p(B/\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0{,}25 - 0{,}1}{0{,}6} = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$ que es la probabilidad del suceso B; esto se debe a que como A y B son independientes, también lo son $\bar{A}$ y B.

2º) En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas. Escogemos uno de los viajeros al azar.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no hable ninguno de los dos idiomas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que no habla inglés?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

Resolución

	Hablan Francés	No hablan Francés	Totales
Hablan Inglés	12	36	48
No hablan Inglés	24	48	72
Totales	36	84	120

Consideramos los sucesos siguientes:
$F = \text{"}Hablar\ francés\text{"}\ ; I = \text{"}Hablar\ inglés\text{"}$

□) $p(\bar{F} \cap \bar{I}) = 1 - p(F \cup I) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ donde

$$p(F \cup I) = p(F) + p(I) - p(F \cap I) = \frac{36}{120} + \frac{48}{120} - \frac{12}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

O bien, directamente de la tabla $p(\bar{F} \cap \bar{I}) = \frac{48}{120} = 0{,}4$

b) $p(F|\bar{I}) = \frac{p(F \cap \bar{I})}{p(\bar{I})} = \frac{p(F) - p(F \cap I)}{1 - p(I)} = \frac{\frac{36}{120} - \frac{12}{120}}{1 - \frac{48}{120}} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ o directamente de la tabla.

c) $p(\text{“}Solo\ hable\ francés\text{”}) = p(F) - p(F \cap I) = \frac{36}{120} - \frac{12}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

3º) Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas con el número 1 y 7 con el número 2. En la bolsa B hay 6 bolas con el número 1 y 2 con el número 2. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos dos bolas de B, de una en una y sin reemplazamiento. ¿cuál es la probabilidad de que
a) las bolas extraídas de B tengan el número 1?
b) las tres bolas tengan el número 1?
c) al menos una bola extraída de B tenga el número 2?

Resolución

Consideramos los sucesos $A_i = \text{" }La\ bola\ extraída\ de\ A\ tiene\ el\ número\ i\text{"}$ y
$B_i = \text{" }La\ bola\ extraída\ de\ B\ tiene\ el\ número\ i\text{"}\ con\ \ i = 1, 2$

a) Sea S el suceso $S=$ "*Las dos bolas extraídas de B tienen el número* 1"

$p(S|A_1)=p(B_1\cap B_2|A_1)=\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{7}{12}$; $p(S|A_2)=p(B_1\cap B_2|A_1)=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$

$$p(S)\overset{T.Prob.Total}{\triangleq}p(A_1)\cdot p(S|A_1)+p(A_2)\cdot p(S|A_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{12}+\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{12}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

b) $p(A_1\cap S)=p(A_1)\cdot p(S|A_1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{7}{40}=0{,}175$

c) Sea el suceso $M=$ "*Al menos* una bola extraída de B tiene el número 2"

El suceso contrario es $S=$ "*Las dos bolas extraídas de B tienen el número* 1" del apartado anterior. En consecuencia, $p(M)=1-p(S)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

4º) En un club deportivo, el 52% de los socios son hombres. Entre los socios, el 35% de los hombres practica la natación, así como el 60% de las mujeres. Si elegimos un socio al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique la natación?
b) Sabiendo que practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$H=$ El socio es hombre" ; $M=$ " *La socio es mujer*" ; $N=$ "*Practicar la natación*"

Del enunciado obtenemos que:

$$p(H)=0{,}52\ ;\ p(M)=1-0{,}52=0{,}48\ ;\ p(N|H)=0{,}35\ ;\ p(N|M)=0{,}6$$

a) Aplicando el Teorema de la probabilidad total tenemos:

$$p(N)=p(H)\cdot p(N|H)+p(M)\cdot p(N|M)=0{,}52\cdot 0{,}35+0{,}48\cdot 0{,}6=0{,}47$$

b) Aplicando el Teorema de Bayes tenemos que:

$$p(M|N)=\frac{p(M)\cdot p(N|M)}{p(N)}=\frac{0{,}48\cdot 0{,}6}{0{,}47}=\frac{0{,}288}{0{,}47}\cong 0{,}613$$

5º) Para que un determinado electrodoméstico salga al mercado debe superar dos controles de calidad, que denominamos A y B. El control de calidad A detecta un electrodoméstico defectuoso con una probabilidad de 0'95 y el B lo detecta con probabilidad 0'85. Calcular la probabilidad de que un electrodoméstico defectuoso:
a) sea detectado.
b) salga al mercado.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$A=$ "El control de calidad A detecta el electrodoméstico defectuoso"

$B=$ "El control de calidad B detecta el electrodoméstico defectuoso"

$D=$ "*El elecrodoméstico defectuoso es detectado*"

Del enunciado tenemos que $p(A)=0'95$; $p(B)=0'85$

a) $p(D)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}95+0{,}85-0{,}95\cdot 0{,}85=0{,}9925$

b) Si un electrodoméstico defectuoso sale al mercado es porque han fallado los dos controles, es decir, no ha sido detectado; por tanto se trata del suceso contrario al del apartado anterior:

$$p(\overline{D})=1-0{,}9925=0{,}0075$$