1º) Se supone que la cantidad de agua, en litros, recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 9 y media muestral 5,67 litros.

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 9S%.

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 2)$

a) Tamaño muestral: $n = 10$; Nivel de confianza $1-\alpha = 0'95$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$

El intervalo de confianza para la cantidad media de agua es:

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(5'67 - 1'96\cdot\frac{2}{\sqrt{9}}, 5'67 + 1'96\cdot\frac{2}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C = (4'363, 6'976)$$

b) $E < 1$; Nivel de confianza $1-\alpha = 0'95$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96\cdot 2}{1}\right)^2 = 15'3664$$

El tamaño muestral mínimo es de 16 días.

2º) El consumo mensual de leche, medido en litros, de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16{,}33\ ;\ 19{,}27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95%.

Solución

a) $\begin{cases} \bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 16{,}33 \\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 19{,}27 \end{cases}$ Sumando miembro a miembro: $2\bar{x} = 35{,}6$, de donde el valor de la media muestral es $\bar{x} = 17{,}8$ y, sustituyendo en la ecuación $\bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 16{,}33$ tenemos que

$17{,}8 + 1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{n}} = 19{,}27$ de donde $n = \left(\frac{1{,}96\cdot 3}{1{,}47}\right)^2 = 16$ que es el tamaño muestral.

b) $E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\cdot\frac{3}{8} = 0{,}735$

3º) El número de pulsaciones por minuto de los habitantes de una región sigue una variable $N(69, 10)$. Se toma una muestra de tamaño 121 de esos habitantes.

a) Hallar la probabilidad de que la media muestral esté entre 67 y 69 pulsaciones por minuto

b) Si la media poblacional μ fuese desconocida, con la muestra anterior, calcula el nivel de confianza para estimar μ con un error inferior a 2 pulsaciones por minuto?

Solución

a) $X \rightsquigarrow N(\mu = 69, \sigma = 10)$

La distribución de las medias muestrales es $\bar{X} \rightsquigarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, es decir $\bar{X} \rightsquigarrow N(69, \frac{10}{11})$

$$p(67 \le \bar{X} \le 69) = p\left(\frac{67-69}{\frac{10}{11}} \le Z \le \frac{69-69}{\frac{10}{11}}\right) = p(-2'2 \le Z \le 0) = p(Z \le 0) - p(Z \le -2'2) =$$

$= 0'5 - p(Z > 22) = 0'5 - \left(1 - p(Z \le 2'2)\right) = 0'5 - 1 + 0'9861 = 0'4861$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{10}{\sqrt{121}} = 2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 2'2$

$$p(Z \le 2'2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0{,}9861 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0{,}0278$$

Por tanto, el nivel de confianza es $1 - \alpha$ =del 97,22%

4º) El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo.

a) Calcula el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0,2 segundos y un nivel de confianza del 95,44%.

b) Para la muestra de tiempos de reacción 7 ; $6,5$; $7,25$; $6,75$; $7,5$, ¿cuál es la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la poblacional no sea menos de 0,6 segundos?

Resolución

Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 1)$

a) $E = 0{,}2$

A ese nivel de confianza, le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 2$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0{,}2 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}2 \Leftrightarrow n \ge \left(\frac{2}{0{,}2}\right)^2 = 100$$

El tamaño muestral mínimo es $n = 100$

b) Media muestral $\bar{x} = \frac{7+6{,}5+7{,}25+6{,}75+7{,}5}{5} = \frac{35}{5} = 7$

Nos piden el nivel de significación α en la estimación de la media poblacional por la media muestral:

$$p(|\mu - \bar{x}| \ge 0{,}6) = \alpha$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}6 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}6 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}34$$

$$p(Z \le 1{,}34) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0{,}9099 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0{,}1802$$

$$p(|\mu - \bar{x}| \ge 0{,}6) = 0{,}1802$$
