1º) En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95%, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 25 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\bar{X}$, sea superior a 230 euros?

Resolución

Variable aleatoria: $X = "Gasto\ familiar\ en\ gas\ natural"$; $X \sim N(\mu, 75)$

a) $I.C$ =(701; 799)

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} < 15 \Leftrightarrow n > \left(\frac{1{,}96 \cdot 75}{15}\right)^2 = 96{,}04$$

El tamaño mínimo muestral es $n = 97$

b) $X \sim N(250, 75)$

La distribución de las medias muestrales es $\bar{X} \sim N\left(250, \frac{75}{\sqrt{25}}\right) = N(250{,}15)$

$$p(\bar{X} > 230) = 1 - p(\bar{X} \leq 230) \overset{Tipificamos}{=} 1 - p\left(Z \leq \frac{230 - 250}{15}\right) = 1 - p(Z \leq -1{,}33) =$$

$$= 1 - p(Z > 1{,}33) = 1 - \left(1 - p(Z \leq 1{,}33)\right) = p(Z \leq 1{,}33) = 0{,}9082$$

$$\boldsymbol{p(\bar{X} > 230) = 0{,}9082}$$

2º) En un laboratorio se obtuvieron seis determinaciones del PH de una solución, con los resultados siguientes:

7,91 7, 94 7, 90 7, 93 7,89 7,91

Se supone que la población de todas las determinaciones de PH de la solución tiene una distribución normal de media desconocida con una desviación típica igual a 0,02.

a) Determínese un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las determinaciones del PH de la misma solución obtenidas con el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a lo sumo 0,02?

Resolución

Variable aleatoria: $X = "PH\ de\ la\ solución"$; $X \sim N(\mu, 0{,}02)$

Media muestral: $\bar{x} = \frac{7{,}91+7{,}94+7{,}90+7{,}93+7{,}89+7{,}91}{6} = \frac{47{,}48}{6} = 7{,}9133$

A un nivel de confianza del 98% corresponde un valor crítico de $z_{\alpha/2} = 2{,}33$

a) $I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(7{,}9133 - 2'33 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{6}}, 7{,}9133 + 2'33 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{6}}\right)$

$$I.C = (7{,}8942\,, 7{,}9323)$$

b) Si amplitud del intervalo de confianza es 0,02 como mucho, el error máximo es 0,01.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \left(\frac{2{,}33 \cdot 0{,}02}{0{,}01}\right)^2 = 21{,}71$$

El tamaño mínimo de la muestra es $n = 22$

3º) El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, **expresado en ms, para** μ **con un nivel de** 95%. **Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.**

b) Si se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25, **¿se puede asegurar que el tiempo medio de reacción de la población de conductores difiere en menos de 64 ms del tiempo medio de la muestra con un nivel de confianza del 80%? En caso negativo, ¿cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para asegurarlo?**

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 250)$

a) $I.C =(701; 799)$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'96$.

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\bar{x} - 1'96\cdot\frac{250}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + 1'96\cdot\frac{250}{\sqrt{n}}\right) = (701; 799)$$

de donde obtenemos el sistema lineal $\begin{cases} \bar{x} - 1'96\cdot\frac{250}{\sqrt{n}} = 701 \\ \bar{x} + 1'96\cdot\frac{250}{\sqrt{n}} = 799 \end{cases}$ en las incógnitas $\bar{x}$ y n.

Resolviendo el sistema obtenemos: Media muestral $\boldsymbol{\bar{x} = 750\ ms}$; Tamaño muestral $\boldsymbol{n = 100}$

b) Tamaño muestral: $n = 25$; Nivel de confianza: 80%

A un nivel de confianza del 80% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'285$.

El tiempo de reacción medio de la población de conductores difiere de la media muestral como mucho el error máximo.

$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'285\cdot\frac{250}{\sqrt{25}} = 64{,}25\ ms > 64\ ms$

Por tanto, no se puede asegurar

Para poder asegurarlo, $E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'285\cdot\frac{250}{\sqrt{n}} < 64$, es decir, $n > \left(\frac{1{,}285\cdot 250}{64}\right)^2 = 25{,}195$

Necesitamos una muestra mínima $\boldsymbol{n = 26}$

4º) El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo.

a) A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0,2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?

b) Para la muestra de tiempos de reacción $\boldsymbol{7\ ;\ 6,5\ ;\ 7,25\ ;\ 6,75\ ;\ 7,5}$**, ¿cuál es la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la poblacional no sea menos de 0,6 segundos?**

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 1)$

a) $n = 100$: $E = 0{,}2$

$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{100}} = 0{,}2 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 2$ valor crítico

Por tanto, $p\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \longmapsto\Leftrightarrow p(Z \leq 2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0{,}9772 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0{,}0456$ y, en consecuencia $1 - \alpha = 0{,}9544$

El nivel de confianza es del 95,44%

b) Media muestral $\bar{x} = \frac{7+6{,}5+7{,}25+6{,}75+7{,}5}{5} = \frac{35}{5} = 7$

Nos piden el nivel de significación α en la estimación de la media poblacional por la media muestral:

$$p(|\mu - \bar{x}| \geq 0{,}6) = \alpha$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}6 \Leftrightarrow z_{\alpha/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}6 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}34$$

$$p(Z \leq 1{,}34) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0{,}9099 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0{,}1802$$

$$\boldsymbol{p(|\mu - \bar{x}| \geq 0,6) = 0,1802}$$

Puntuación

1, 2 ---------------- 2 puntos

3,4 ----------------- 3 “