Matemáticas Aplicadas II **Ev2. Ej2Derivadas y aplicaciones** Feb-2017**

1] Calcula $f'(0)$ siendo $f(x) = 3 \cdot (e^{2x} - e^{-2x})$

$\boldsymbol{f'(x) = 3 \cdot \left(2e^{2x} + 2e^{-2x}\right) = 6 \cdot \left(e^{2x} + e^{-2x}\right)}$; $\boldsymbol{f'(0) = 12}$

2] Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x \cdot (1-2x)^3$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$\boldsymbol{f'(x) = (1-2x)^3 - 6x(1-2x)^2}$; $\boldsymbol{f(1) = -1}$; $\boldsymbol{f'(1) = -7}$;

$$\textbf{\textit{Recta tangente}}: t \equiv y + 1 = -7(x-1) \ ; \ t \equiv \ y = -7x + 6$$

3] Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} L(2-x) + a & si \ \ x \le 1 \\ \frac{a(x+1)^2}{2} + b & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de los parámetros reales a y b para que sea derivable en $x = 1$.

Resolución

Continuidad en $x = 1$

1º) $f(1) = L1 + a = a$

2º) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (L(2-x) + a) = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{a(x+1)^2}{2} + b\right) = 2a + b \end{cases} \qquad \exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) \Leftrightarrow a + b = 0$

Por tanto $f(x)$ es continua si y solo si $a + b = 0$

Derivabilidad en $x = 1$

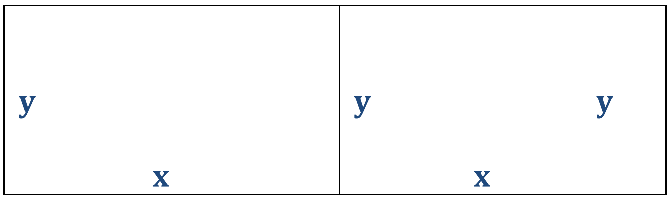
$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2-x} & si \ \ x < 1 \\ a(x+1) & si \ \ x > 1 \end{cases}$ **Si $a + b = 0$ entonces** $\begin{cases} f'(1)^- = -1 \\ f'(1)^+ = 2a \end{cases}$ **de donde concluimos:**

$$f(x) \text{ derivable en } x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \ \ y \ \ b = \frac{1}{2}$$

4] Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.

Resolución

Sean x e y las dimensiones de cada rectángulo (largo y ancho) en metros:



Los metros lineales de cerca utilizados serán $4x + 3y$; por tanto $4x + 3y = 300$. El área encerrada es $2 \cdot x \cdot y$.

Así, el planteamiento del problema es:

$$\text{Maximizar } A(x,y) = 2 \cdot x \cdot y$$
$$\text{s.a} \ \ 4x + 3y = 300$$

$4x + 3y = 300 \Rightarrow y = 100 - \frac{4}{3}x$. Sustituyendo en la función área tenemos:

$$A(x) = 2 \cdot x \cdot \left(100 - \frac{4}{3}x\right) = 200x - \frac{8}{3}x^2$$

Derivando, $A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - \frac{16}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 37'5m$$

Como $A''(x) = -\frac{16}{3} < 0$, el valor $x = 37'5$ es máximo.

De $y = 100 - \frac{4}{3}x$ obtenemos $y = 100 - \frac{4\cdot 37'5}{3} = 50\ m$

Las dimensiones de cada rectángulo deben ser de $x = 37'5\ m$ e $y = 50\ m$ con un área máxima de $A(37'5, 50) = 2 \cdot 37'5 \cdot 50 = 3750\ m^2$

5] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$

Se pide:
a) Determina dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Curvatura, puntos de inflexión y asíntotas de la función.
c) Esboza la gráfica de la función f.

Resolución

a)) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{2x\cdot 2x - 2\cdot(x^2-1)}{4x^2} = \frac{2x^2+2}{4x^2} > 0$ en su dominio ; por tanto $f(x)$ es creciente.

b) $f''(x) = \frac{4x\cdot 4x^2-(2x^2+2)\cdot 8x}{16x^4} = \frac{-1}{x^3}\begin{cases} > 0\ en\ (-\infty, 0)\ Cóncava \\ < 0\ en\ (0, +\infty)\ Convexa \end{cases}$ No hay puntos de inflexión

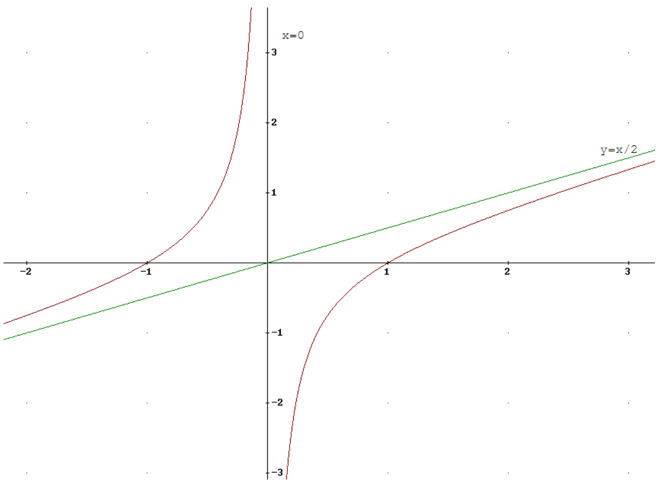
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to o^-} \frac{x^2-1}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{2x} = -\infty \end{cases}$ En $x = 0$ asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{2x} = \pm\infty$ No tiene asíntota horizontal

$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{2x} : x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2}$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{2x} - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{2x}\right) = 0$

La recta $y = \frac{x}{2}$ es asíntota oblicua.

c) Representación gráfica



Puntuación

1 ---------------- 1 punto
2 ---------------- 1'25 "
3, 4 ------------- 2 "
5 ---------------- 3'75 "