1] Calcula $f'(0)$ siendo

a) $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

b) $f(x) = \frac{x \cdot (2x-1)^4}{2}$

Resolución

a) $f'(x) = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{2} = e^{2x} + e^{-2x}$; $f'(0) = 1 + 1 = 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}\left[(2x-1)^4 + 8x \cdot (2x-1)^3\right]$; $f'(0) = \frac{1}{2}$

2] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} L(1-x) & si\ x \leq 0 \\ a(x+1)^2 + b & si\ x > 0 \end{cases}$

Estudia su derivabilidad en $x = 0$ según los valores de los parámetros reales a y b.

Resolución

Continuidad en $x = 0$

1º) $f(0) = L1 = 0$

2º) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (L(1-x)) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(a(x+1)^2 + b\right) = a + b \end{cases} \exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) \Leftrightarrow a + b = 0$

Por tanto $f(x)$ es continua si y solo si $a + b = 0$

Derivabilidad en $x = 0$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si\ x < 0 \\ 2a(x+1) & si\ x > 0 \end{cases}$ **Si $a + b = 0$ entonces** $\begin{cases} f'(0)^- = -1 \\ f'(0)^+ = 2a \end{cases}$ **de donde concluimos:**

$$f(x) \text{ derivable en } x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}\ \ y\ \ b = \frac{1}{2}$$

3] El coste, en euros, de producción de x unidades de un cierto producto viene dado por la función $C(x) = ax - b\sqrt{2x}$, siendo a y b parámetros reales. Calcula los valores de dichos parámetros sabiendo que una producción de $x = 50$ unidades supone un coste de 50 euros y que además es el mínimo coste de producción.

Resolución

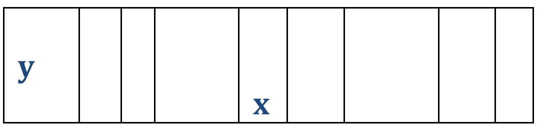
$$C'(x) = a - \frac{b}{\sqrt{2x}}$$

Del enunciado tenemos $\begin{cases} C(50) = 50 \\ C'(50) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50a - 10b = 50 \\ a - \frac{b}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1\ ;\ b = -10$

4] Un granjero que tiene 500 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en 9 corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los 9 corrales?. Razona la contestación.

Resolución

Sean x e y las dimensiones del rectángulo (largo y ancho) en metros:



Los metros lineales de cerca utilizados serán $2x + 10y$; por tanto $2x + 10y = 500$ o equivalentemente $x + 5y = 250$. El área máxima no depende de la de cada parcela, es la suma de ellas que coincide con la del rectángulo $x \cdot y$.

Así, el planteamiento del problema es:

$$\textbf{Maximizar } A(x,y) = x \cdot y$$
$$\textbf{s.a } \quad x + 5y = 250$$

$x + 5y = 250 \Longrightarrow x = 250 - 5y$. **Sustituyendo en la función área tenemos:**

$$A(y) = (250 - 5y) \cdot y = 250y - 5y^2$$

Derivando, $A'(y) = 250 - 10y$

$$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 250 - 10y = 0 \Leftrightarrow y = 25\ m$$

Como $A''(y) = -10 < 0$**, el valor** $y = 25$ **es máximo.**

De $x = 250 - 5y$ **obtenemos** $x = 125\ m$

El área total máxima posible de los 9 corrales es $A(125, 25) = 125 \cdot 25 = 3125\ m^2$

5] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$**.**
b) Determina dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, curvatura y asíntotas de la función.
c) Esboza la gráfica de la función f**.**

Resolución

a) $f'(x) = \frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$; $f(1) = 0$; $f'(1) = 2$; $\textit{Recta tangente}: t \equiv y = 2 \cdot (x-1)$

b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$ **en su dominio y por tanto creciente.**

$$f''(x) = \frac{2x^3 - (x^2+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \begin{cases} > 0 \text{ en } (-\infty, 0) \text{ Cóncava} \\ < 0 \text{ en } (0, +\infty) \text{ Convexa} \end{cases}$$

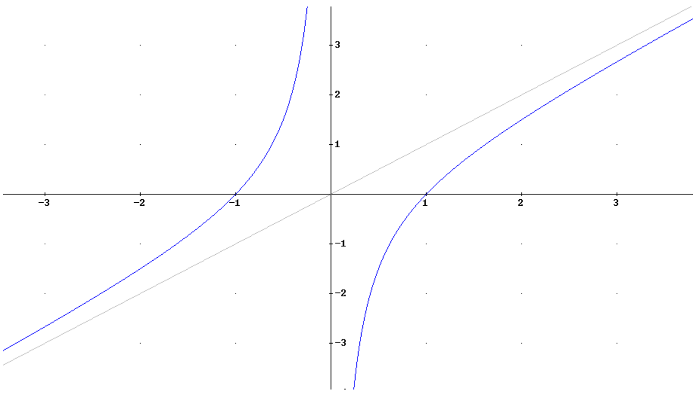
$$\begin{cases} \lim_{x \to o^-} \frac{x^2-1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty \end{cases} \qquad \text{En } x = 0 \text{ asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x} = \pm\infty \qquad \text{No tiene asíntota horizontal}$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} : x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 \ ; \ n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-1}{x} \right) = 0$$

La recta $y = x$ **es asíntota oblicua.**

c)



Puntuación

1 ---------------------- 1,5 puntos
2, 3, 4 ---------------- 2 “
5 ---------------------- 2,5 “