Matemáticas Aplicadas II. Probabilidad. Ev3. Ej1. Abril 16

1º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0{,}3 \qquad p(A \cap \bar{B}) = 0{,}2 \qquad p(B) = 0{,}7$$

Calcúlese:

a) $p(A \cup B)$

b) $p(B \,/\, \bar{A})$

Resolución

a) $\boldsymbol{p(A \cap \bar{B}) = 0,2 \Leftrightarrow p(A) - p(A \cap B) = 0,2}$ **de donde** $\boldsymbol{p(A) = 0,2 + p(A \cap B) = 0,5}$

$$\textbf{Así, } \boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,7 - 0,3 = 0,9}$$

b)

$$\boldsymbol{p(B/\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = \frac{4}{5} = 0,8}$$

2º) En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) Haya una bola de cada color.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$\boldsymbol{R_1 = "La\ primera\ bola\ es\ roja"}$; $\boldsymbol{R_2 = "La\ segunda\ bola\ es\ roja"}$

$\boldsymbol{V_1 = "La\ primera\ bola\ es\ verde"}$; $\boldsymbol{V_2 = "La\ segunda\ bola\ es\ verde"}$

a)

$$\boldsymbol{p((R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)) = p(R_1 \cap R_2) + p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 0 = \frac{3}{5} = 0,6}$$

b) Una bola de cada color es el suceso contrario a que las dos sean del mismo color, por tanto la probabilidad pedida es $\boldsymbol{p = 1 - 0,6 = 0,4}$. También podemos proceder así:

$$\boldsymbol{p((R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2)) = p(R_1) \cdot p(V_2/R_1) + p(V_1) \cdot p(R_2/V_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2}{5} = 0,4}$$

3º) Las probabilidades de que cuatro jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de $\boldsymbol{0,8}$; $\boldsymbol{0,9}$; $\boldsymbol{0,7}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{0,9}$. Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:

a) Todos los jugadores encesten su tiro libre.

b) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste su tiro.

Resolución

Consideramos los sucesos $\boldsymbol{J_i = "\ El\ jugador\ i\ encesta\ su\ tiro\ libre"\ con\ \ i = 1,2,3,4}$

a) Al tratarse de sucesos independiente tenemos que:

$$\boldsymbol{p(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4) = p(J_1) \cdot p(J_2) \cdot p(J_3) \cdot p(J_4) = 0,8 \cdot 0,9^2 \cdot 0,7 = 0,4536}$$

b) Consideramos el suceso $\boldsymbol{S = "Al\ menos\ uno\ de\ los\ tres\ primeros\ jugadores\ encesta\ su\ tiro"}$

El suceso contrario es $\boldsymbol{\bar{S} = "\ Ninguno\ de\ los\ tres\ primeros\ jugadores\ encesta\ su\ tiro"}$

$$\boldsymbol{p(\bar{S}) = p(\bar{J_1} \cap \bar{J_2} \cap \bar{J_3}) = 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,006}$$

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$\boldsymbol{p(S) = 1 - p(\bar{S}) = 1 - 0,006 = 0,994}$$

4º) La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es ¾ y, de ellos, la cuarta parte va en transporte público. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:
a) Un trabajador elegido al azar vaya al trabajo en transporte público.
b) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.
c) Si un trabajador ha llegado a su puesto de trabajo en transporte público, lo haya hecho puntual.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$A = "Un\ trabajador\ llega\ puntual\ a\ su\ puesto\ de\ trabajo"\ ;\ \ S = "Ir\ en\ transporte\ público"$

Del enunciado obtenemos que:

$$p(A) = \frac{3}{4}\ ;\ \ p(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\ ;\ \ p(S|A) = \frac{1}{4}\ ;\ \ p(S|\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

a) Aplicando el Teorema de la probabilidad total tenemos:

$$p(S) = p(A)\cdot p(S|A) + p(\bar{A})\cdot p(S|\bar{A}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

b)

$$p(\bar{A}\cap S) = p(\bar{A})\cdot p(S|\bar{A}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$$

c) Aplicando el Teorema de Bayes tenemos que:

$$p(A|S) = \frac{p(A)\cdot p(S|A)}{p(S)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

5º) La probabilidad de que, en un cierto mes, un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0,6; la probabilidad de que compre un producto B es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto B no habiendo comprado el producto A es 0,4.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado solo el producto B?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos?

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$A = "Comprar\ el\ producto\ A"\ ;\ \ B = "Comprar\ el\ producto\ B"$

Del enunciado tenemos que:

$$p(A) = 0'6\ \ ;\ \ p(B) = 0'5\ ;\ \ p(B|\bar{A}) = 0'4$$

Deducimos que $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0'6 = 0'4$

a) $p(B|\bar{A}) = 0'4 \Leftrightarrow \frac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})} = 0'4 \Leftrightarrow p(B\cap\bar{A}) = 0'4\cdot p(\bar{A}) = 0'4\cdot 0'4 = 0'16$

Por tanto la probabilidad de que un cliente solo haya comprado el producto B es:

$$p(B\cap\bar{A}) = 0'16$$

b) Como $p(B|\bar{A}) = 0'4$ **, tenemos que** $p(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - p(B|\bar{A}) = 1 - 0'4 = 0'6$**, es decir,**

$$p(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{\mathrm{p}(\bar{\mathrm{B}}\cap\bar{\mathrm{A}})}{\mathrm{p}(\bar{\mathrm{A}})} = 0'6$$

de donde $\mathrm{p}(\bar{\mathrm{B}}\cap\bar{\mathrm{A}}) = 0'6\cdot\mathrm{p}(\bar{\mathrm{A}}) = 0'6\cdot 0'4 = 0'24$**.**

La probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos es:

$$p(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0'24$$